PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2000

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1

1-A) Sea la función $f(x) = nx - x^n$, siendo n un número entero distinto de 0 y 1.

a) Comprobar que, para cualquier valor de n distinto de 0 y 1, f(x) tiene un extremo relativo en x = 1. Averiguar si depende o no del valor de n, el que este extremo sea máximo o mínimo.

b) Suponiendo ahora que n > 1, determinar, según los valores de n, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Utilizar esto para probar que $nx - x^n \le n-1,\ \forall x \ge 0 \ \ y \ \ \forall n > 1.$

----

a)

Las derivadas sucesivas de f(x) son las siguientes:

$$f(x) = nx - x^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x) = n - n\,x^{n-1} = n\left(1 - x^{n-1}\right) \\ f''(x) = -n(n-1)\,x^{n-2} \\ f'''(x) = -n(n-1)(n-2)\,x^{n-3} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ f^{n)}(x) = -n(n-1)(n-2)\cdot \ \cdots\cdots \ \cdot 1 \cdot x^0 = -n! \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ n\left(1 - x^{n-1}\right) = 0 \ ;; \ 1 - x^{n-1} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{x = 1},\ \ \forall n \in N,\ \{n > 1\}$$

$$f''(x) = -n(n-1)\cdot x^{n-2} < 0,\ \ \forall x \in R \ \ y \ \ \forall n \in N,\ \{n > 1\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Máximo}}$$

El extremo es un máximo, independientemente del valor de n.

A. Menguiano

b)

$$f'(x)=n\cdot\left(1-x^{n-1}\right)\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{f'(x)>0,\ \ \forall x\in R,\ \ |x|<1\ \ y\ \ \forall n\in N,\ \{n>1\}\ \Rightarrow\ Creciente}}\\[2ex]\underline{\underline{f'(x)<0,\ \ \forall x\in R,\ \ x>1\ \ y\ \ \forall n\in N,\ \{n>1\}\ \Rightarrow\ Decreciente}}\\[2ex]Para\ \ x<-1\ \Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{n\rightarrow Par\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ Decreciente}}\\[2ex]\underline{\underline{n\rightarrow \mathrm{Im}\,par\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ Creciente}}\end{cases}\end{cases}$$

1-B) Dada la función $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$, se pide:

a) Dominio y cortes con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f(x) y el eje de abscisas.

----

a)

El dominio de f(x) es el conjunto de números reales que hacen $5-x^2 \geq 0$;;

$$5 \geq x^2 \;;\; x \leq \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(f) \Rightarrow \left[-\sqrt{5},\ +\sqrt{5}\right]}}.$$

$$Corte\ \ con\ \ los\ \ ejes \Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow y = f(x) = 0 \;;\; x\sqrt{5-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}} \\ \underline{x_2 = \sqrt{5}} \rightarrow \underline{\underline{A(\sqrt{5},\ 0)}} \\ \underline{x_3 = -\sqrt{5}} \rightarrow \underline{\underline{B(-\sqrt{5},\ 0)}} \end{cases} \\ \\ Y \Rightarrow \underline{x = 0} \rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}} \end{cases}$$

$$f(x) = x\sqrt{5-x^2} = +\sqrt{5x^2-x^4} \;;\; f'(x) = \frac{10x-4x^3}{2\sqrt{5x^2-x^4}} = \underline{\frac{5x-2x^3}{\sqrt{5x^2-x^4}} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x-2x^3}{\sqrt{5x^2-x^4}} = 0 \;;\; 5x-2x^3 = 0 \;;\; x(5-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}} \\ \underline{x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}} \end{cases}$$

Tomamos un valor intermedio de las raíces, por ejemplo x = 1, para el cual el valor de la derivada es:

$$f'(1) = \frac{5-2}{\sqrt{5-1}} = \frac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow \left(-\sqrt{5},\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0,\ \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \Rightarrow Creciente}} \\ \\ \underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\ 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ +\sqrt{5}\right) \Rightarrow Decreciente}} \end{cases}$$

b)

Por ser positivas todas las ordenadas de la función $f(x)=x\sqrt{5-x^2} = \sqrt{5x^2-x^4}$, y por la simetría con respecto al eje de ordenadas, el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{5 - x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 5 - x^2 = t \\ x\,dx = -\frac{1}{2} dt \end{matrix} \,\middle\|\, \begin{matrix} x = \sqrt{5} \to t = 0 \\ x = 0 \to t = 5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = 2 \cdot \int_5^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot dt =$$

$$= -\int_5^0 \sqrt{t} \cdot dt = \int_0^5 t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_0^5 = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{10\sqrt{5}}{3}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE 2

2-A) Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n, averiguar el valor del determinante de las siguientes matrices: $B=\begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$.

$$|A|=n \Rightarrow |B|=\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 6\cdot 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{\underline{36n=|B|}}$$

$$|A|=n \Rightarrow |C|=\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} = M+N=|C| \qquad (*)$$

$$M=\begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = \underline{-n=M}$$

$$N=\begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} = 0+0=\underline{0=N}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N, resulta:

$$|C|=\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = -n+0=\underline{\underline{-n=|C|}}$$

****

2-B) Se considera la función $f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$. Sabiendo que f(0) = -3 y que f(1) = f(-1), determinar a y b.

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}=$$

$$=a\,x^3+bx^2+3b-2ax=\underline{a\,x^3+bx^2-2ax+3b=f(x)}$$

$$f(0)=-3 \Rightarrow 3b=-3 \;;;\; \underline{\underline{b=-1}} \quad ;; \quad \underline{f(x)=ax^3-x^2-2ax-3}$$

$$f(1)=-1 \Rightarrow a-1-2a-3=-1 \;;;\; \underline{\underline{-3=a}}$$

$$\underline{\underline{f(x)=-3x^3-x^2+6x-3}}$$

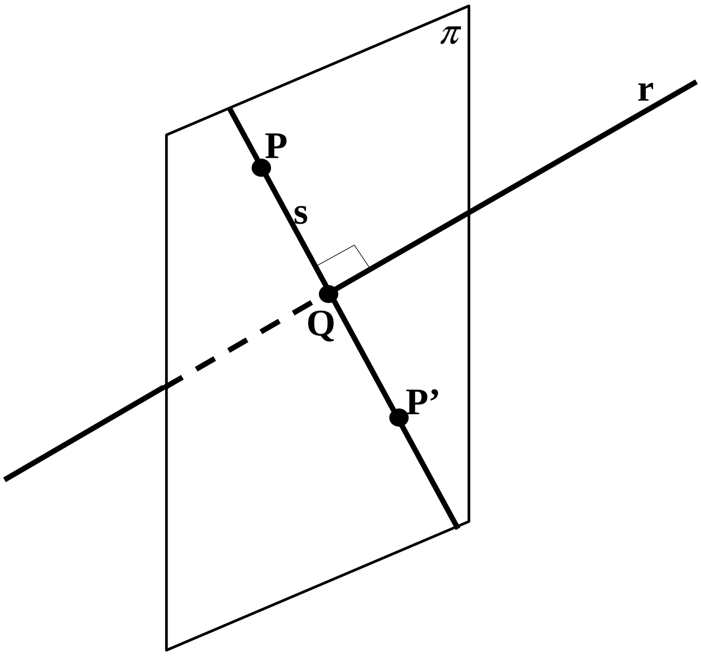
****

BLOQUE 3

3-A) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2, -1, 0) y corta perpendicularmente a r. Calcular el punto Q intersección de r y s y el simétrico de P con respecto a r.

b) Obtener, explicando el procedimiento utilizado, una recta paralela a s que se cruce con r.



a) La situación del apartado está representada en la figura adjunta.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es de la forma siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3x - y = -\lambda \\ -x + y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = -1 - \lambda \;\;;;$$

$$\underline{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda} \;\;;;\;\; x - y = 1 \;\;;;\;\; y = x - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - 1 = \underline{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de r puede ser $\overrightarrow{w} = (1,\ 1,\ -2)$.

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $x + y - 2z + D = 0$, y de ellos, sea π el que contiene a P(2, -1, 0); la ecuación general de π es la siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z + D = 0 \\ P(2,\ -1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - 1 - 0 + D = 0 \;\;;;\;\; D = -1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0}.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) - 2\lambda - 1 = 0 \ ;; \ -2 - \lambda - 2\lambda - 1 = 0 \ ;;$$

$$-3\lambda - 3 = 0 \ ;; \ \lambda + 1 = 0 \ ;; \ \underline{\lambda = -1} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Q(0, \ -1, \ -1)}}$$

Un vector director de la recta r puede ser $\overrightarrow{v}$, siendo:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, \ -1, \ -1) - (2, \ -1, \ 0) = \underline{(-2, \ 0, \ -1) = \overrightarrow{v}}$$

La recta s pasa por P y tiene como vector director $\overrightarrow{v}$: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 \\ z = -\lambda \end{cases}}}$

El punto P', por pertenecer a la recta r es de la forma $P'(2 - 2\lambda, \ -1, \ -\lambda)$.

De la observación de la figura se deduce por simetría que: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q - P = P' - Q \ \Rightarrow \ (0, \ -1, \ -1) - (2, \ -1, \ 0) = (2 - 2\lambda, \ -1, \ -\lambda) - (0, \ -1, \ -1) \ ;;$$

$$(-2, \ 0, \ -1) = (2 - 2\lambda, \ 0, \ -\lambda + 1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2 = 2 - 2\lambda \\ -1 = -\lambda + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lambda = 2} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(-2, \ -1, \ -2)}}$$

b)

Cualquier recta r', paralela a r, puede tener como vector director al vector $\overrightarrow{w}$, director de la recta r; como punto puede tomarse cualquier punto del plano π que no sea el punto Q; podemos tomar, por ejemplo el punto P(2, -1, 0):

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{w} = (1, \ 1, \ -2) \\ \\ P(2, \ -1, \ 0) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}}$$

****

3-B) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$, se pide:

a) De todos los planos que se pueden representar por una ecuación de la forma: $\alpha \equiv 5x + my - 2z + 1 = 0$, probar que hay un único plano π que es paralelo a r. Comprobar si el plano π obtenido contiene o no a la recta r y en caso negativo, determinar el plano π_1 que es paralelo a π y contiene a r.

b) Obtener la ecuación de una recta t contenida en π_1 que sea perpendicular a r. ¿Cuántas hay?

----

a)

Si el plano π es paralelo a la recta r, el sistema que forman tiene que ser incompatible, es decir, que no tienen ningún punto en común.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema resultante son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m & -2 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & m & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de M’ considerando las columnas 1ª, 3ª y 4ª $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 10 - 4 = -20 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M' = 3}$$

Como el rango de M tiene que ser diferente, ha de ser, necesariamente, $|M| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; 4 - 10 - 4m - 2 = 0 \;;;\; 4m = -8 \;;;\; \underline{m = -2}$$

El plano π pedido, único, tiene por ecuación $\underline{\underline{\pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0}}$.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ x - y = -1 - 2\lambda \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 + 2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x = 2 + 2\lambda} \;;;$$

$$2x - y = 1 \;;;\; y = 2x - 1 = 4 + 4\lambda - 1 = \underline{3 + 4\lambda = y} \quad \Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Si el plano π contiene a la recta r tiene que satisfacer su ecuación $\forall \lambda \in R$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 5x-2y-2z+1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 5(2+2\lambda)-2(3+4\lambda)-2\lambda+1=0 \ ;;$$

$$10+10\lambda-6-8\lambda-2\lambda+1=0 \ ;; \ 5=0 \ ?? \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi \ no \ contiene \ a \ r}}$$

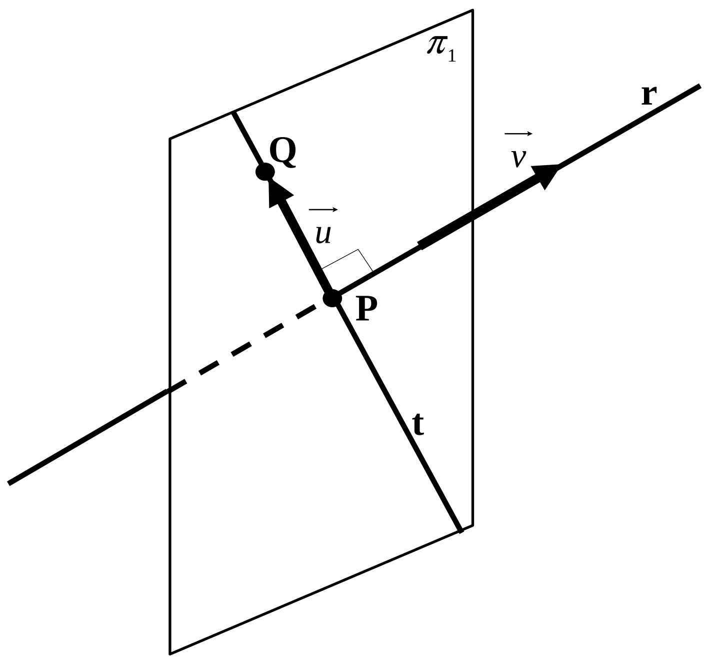
El plano π_1 paralelo a π que contiene a la recta r es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 5x-2y-2z+D=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=3+4\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 5(2+2\lambda)-2(3+4\lambda)-2\lambda+D=0 \ ;;$$

$$10+10\lambda-6-8\lambda-2\lambda+D=0 \ ;; \ 4+D=0 \ ;; \ D=-4 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\pi_1 \equiv 5x-2y-2z-4=0}}$$

b)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v}=(2, \ 4, \ 1)$.



Tomamos un punto genérico Q, perteneciente al plano π_1, que tenga una componente nula con objeto de facilitar el cálculo, por ejemplo x = 0; sería:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 5x-2y-2z-4=0 \\ \underline{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y-2z-4=0 \ ;; \ y+z+2=0 \ ;;$$

$$\underline{z=-y-2} \ \Rightarrow \ \underline{Q(0, \ y, \ -y-2)}$$

El vector $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}$ es:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0, \ y, \ -y-2)-(2, \ 3, \ 0)=\underline{(-2, \ y-3, \ -y-2)=\overrightarrow{u}}$$

El vector $\overrightarrow{u}$ va a ser el director de la recta t, que pasará por el punto P. Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen que ser perpendiculares, por lo tanto, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow (-3,\ y-3,\ -y-2) \cdot (2,\ 4,\ 1) = 4 - 12 - 4y + y + 2 = 0 \ ;;\ 18 = 3y \ ;;\ y = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} = (-2,\ 3,\ -8)} \Rightarrow \quad t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-2,\ 3,\ -8) \\ P(2,\ 3,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = -8\lambda \end{array} \right.$$

****