PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2001

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1

1-A) Si $f(x)=e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)$, se pide:

a) Dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

c) A partir de los resultados anteriores, obtener el menor valor de c para que se cumpla $e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)<c$ para todo x > 2.

----

a)

El dominio de la f(x) es R, por ser producto de dos funciones que son continuas y derivables en su dominio, que en ambas es R, lo que hace que f(x) también lo sea.

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$$

Los puntos de corte con el eje X son para los valores de x que hacen f(x) = 0:

$f(x)=e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)=0 \;\Rightarrow\; x^2+6x+9=0$, por ser $e^{-x}\neq 0,\ \forall x\in R$.

$$x^2+6x+9=0\ \ ;;\ \ (x+3)^2=0\ \ ;;\ \ \underline{x=-3}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{A(-3,\ 0)}}$$

Los puntos de corte con el eje Y son los valores de la función para x = 0:

$$f(0)=e^{-0}\left(0^2+6\cdot 0+9\right)=1\cdot 9=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B(0,\ 9)}}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito.

$$y=k\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+9}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\ \Rightarrow\ In\det.\ \Rightarrow\ \{L'Hopital\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{La\ \ recta\ \ y=0\ \ (Eje\ \ X)\ \ es\ \ asíntota\ \ de\ \ la\ \ función.}}$$

Verticales: son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$e^x\neq 0,\ \ \forall x\in R\ \Rightarrow$ No tiene.

Oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

En el caso que nos ocupa: no existen asíntotas oblicuas.

b)

$$f'(x)=-e^{-x}\left(x^2+6x+9\right)+e^{-x}(2x+6)=e^{-x}\left(-x^2-4x-3\right)=\underline{-e^{-x}\left(x^2+4x+3\right)=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -e^{-x}\left(x^2+4x+3\right)=0\ ;;\ x^2+4x+3=0.$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=-2\pm 1\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{x_1=-3}\\ \underline{x_2=-1}\end{cases}$$

$$f''(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+3\right)-e^{-x}(2x+4)=\underline{e^{-x}\left(x^2+2x-1\right)=f''(x)}$$

$$f''(-3)=e^3\left[(-3)^2+2\cdot(-3)-1\right]=e^3(9-6-1)=2e^3>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=-3}$$

$$f(-3)=e^3\left[(-3)^2+6\cdot(-3)+9\right]=e^3(9-18+9)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ P(-3,\ 0)}}$$

$$f''(-1)=e^{+1}\left[(-1)^2+2\cdot(-1)-1\right]=e(1-2-1)=-2e<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ para\ \ x=-1}$$

$$f(-1)=e^{+1}\left[(-1)^2+6\cdot(-1)+9\right]=e(1-6+9)=4e\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo:\ Q(-1,\ 4e)}}$$

Por tratarse de una función continua, tiene que ser, necesariamente:

$$\underline{\underline{Decreciente \quad para \quad \left(-\infty,\ -3\right)\cup\left(-1,\ +\infty\right) \quad y \quad Creciente \quad para \quad \left(-1,\ -3\right)}}$$

c)

Por tratarse de una función decreciente para x > 2, basta que sea f(2) < c:

$$e^{-2}\left(2^2+6\cdot 2+9\right)<c \quad ;; \quad \frac{4+12+9}{e^2}<c \quad ;; \quad c>\frac{25}{e^2}\cong\frac{25}{7'39}=3'38 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c>3'38}}$$

****

1-B) Se considera la función $f(x)=\left| sen\ (4x)-\frac{1}{2} \right|$, se pide:

a) Puntos de corte con los ejes. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que toma la función f(x)?

b) Estudio de la continuidad y derivabilidad de f(x) en el intervalo $(0,\ \pi)$.

----

a) Puntos de corte con los ejes. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que toma la función f(x)?

Cortes con el eje X: f(x) = 0:

$$f(x)=0\ \Rightarrow \left| sen\ (4x)-\frac{1}{2} \right| = 0\ \ ;;\ \ sen\ (4x)-\frac{1}{2}=0\ \ ;;\ \ sen\ (4x)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 4x=2k\pi+90º\pm 60º\ \ ;;$$

$$4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\ \ ;;\ \ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{12}\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{\pi}{24}(12k+3\pm 2),\ \forall k\in Z}$$

Los puntos de corte son:

$$k=0\ \Rightarrow \left\{ \underline{\underline{A\left(\frac{\pi}{24},\ 0\right)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{B\left(\frac{5\pi}{24},\ 0\right)}} \right\}\ \ ;;\ \ k=1\ \Rightarrow \left\{ \underline{\underline{C\left(\frac{13\pi}{24},\ 0\right)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{D\left(\frac{17\pi}{24},\ 0\right)}} \right\}\ \ ;;$$

$$k=-1\ \Rightarrow \left\{ \underline{\underline{E\left(-\frac{11\pi}{24},\ 0\right)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{F\left(-\frac{7\pi}{24},\ 0\right)}} \right\}\ \ \cdots\cdots\cdots\cdot$$

El corte con el eje Y se produce para x = 0: $f(0)=\left| sen\ 0-\frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P\left(0,\ \frac{1}{2}\right)}}$.

La función tendrá un máximo cuando la expresión $sen\ (4x)$ tenga el mayor valor posible de signo negativo, o sea, cuando $sen\ (4x)=-1$:

$$4x=270º+k\cdot 360º=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ \ ;;\ \ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{\pi}{8}(3+4k),\ \forall k\in Z}$$

Los puntos máximos son los que tienen las siguientes abscisas:

$$k=0\ \Rightarrow\ \underline{x=\frac{3\pi}{8}}\ \ ;;\ \ k=1\ \Rightarrow\ \underline{x=\frac{7\pi}{8}}\ \ ;;\ \ k=-1\ \Rightarrow\ x=-\frac{\pi}{8}\ \ \cdots\cdots\cdots\cdot$$

Los puntos mínimos, dado el carácter de función de valor absoluto, son los valores de ordenada cero, o sea, los puntos de corte determinados anteriormente.

b)

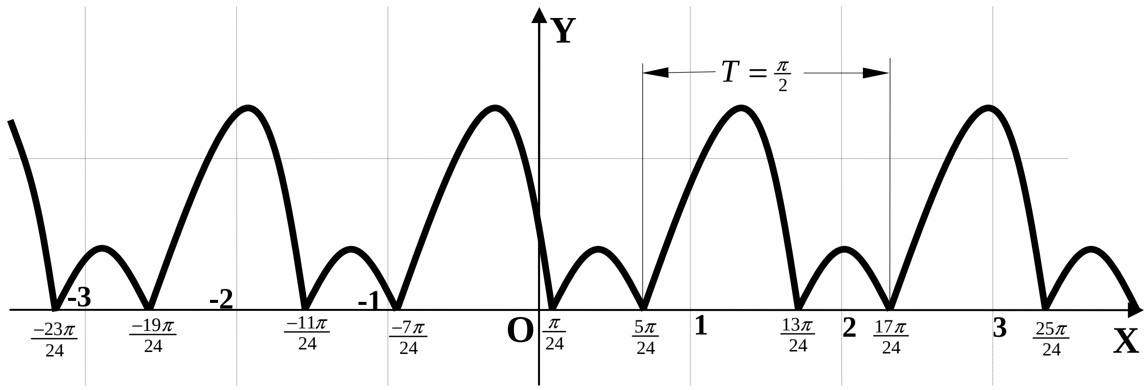
La función es continua en R por ser la diferencia de dos funciones continuas en R.

Para estudiar la derivabilidad de la función en el intervalo $(0,\ \pi)$ tendremos en cuenta que la función $f(x)=\left| sen\ (4x)-\frac{1}{2} \right|$ es periódica cuya periodicidad se obtiene considerando que el periodo de $sen\ x$ es 2π, por consiguiente el periodo de la función que estamos estudiando es: $T \to 4x = 2\pi$;; $\underline{T \to x = \frac{\pi}{2}}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la función puede redefinirse de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} sen\ (4x)-\frac{1}{2} & si \quad \frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \\ \\ -\ sen\ (4x)+\frac{1}{2} & si \quad \frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} < x \le \frac{13\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \end{cases} \qquad \forall k \in Z\ .$$

La representación gráfica aproximada de la función es la expresada en el dibujo:



De la observación de la figura se deduce la no derivabilidad de la función en los puntos de corte con el eje X, se forman “picos”, lo que evidencia la desigualdad de la derivada por los lados de cada uno de los puntos considerados.

Para justificar la no derivabilidad vamos a considerar el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{24}$, que se produce para k = 0; es $f(x)=\begin{cases} -\ sen\ (4x)+\frac{1}{2} & si \quad x<\frac{\pi}{24} \\ \\ sen\ (4x)-\frac{1}{2} & si \quad x \ge \frac{\pi}{24} \end{cases}$ (por lo expuesto anteriormente no consideramos necesario demostrar la continuidad en este punto).

$$f'(x)=\begin{cases} -4\cos(4x) & si \quad x<\dfrac{\pi}{24} \\ \\ 4\cos(4x) & si \quad x\geq\dfrac{\pi}{24} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'\left[\left(\frac{\pi}{24}\right)^{-}\right]=-4\cos\dfrac{\pi}{6}=-4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{-2\sqrt{3}} \\ \\ f'\left[\left(\frac{\pi}{24}\right)^{+}\right]=4\cos\dfrac{\pi}{6}=4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\underline{2\sqrt{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'\left[\left(\tfrac{\pi}{24}\right)^{-}\right]\neq f'\left[\left(\tfrac{\pi}{24}\right)^{+}\right] \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \ \ no \ \ es \ \ derivable \ \ para \ \ x=\frac{\pi}{24}}} \quad (como \ \ esperábamos)$$

****

BLOQUE 2

2-A) Si $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) Probar que para cualquier valor de a y b, rango $A \geq 2$.

b) Determinar un par de valores reales de a y b para los cuales sea rango A = 3 y otro par de valores de a y b de forma que rango A = 4.

----

a)

Debemos estudiar los casos en que a = 0, b = 0 y b = -1. Considerando los menores M_1 y M_2 correspondientes a las zonas sombreadas de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$M_1=\begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix}=\underline{(b+1)^2=M_1} \quad ;; \quad M_2=\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix}=\underline{b^2=M_2}.$$

Independientemente del valor de a, si b = 0 es $M_1 \neq 0$ y si b = -1 es $M_2 \neq 0$, lo cual demuestra que

$$\underline{\underline{\forall a,\ b \in R \Rightarrow Rango\ \ A \geq 2}}$$

b)

Desarrollando el determinante de A, por ejemplo, por los menores adjuntos de la primera columna:

$$|A|=a\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b+1 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}-(b+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ b+1 & 0 & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}=a^2\cdot\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & b \end{vmatrix}+(b+1)^2\cdot\begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix}=$$

$$=\underline{-a^4+(b+1)^2\cdot b^2=|A|}$$

Para que Rango A = 3 tiene que ser:

$$-a^4+(b+1)^2\cdot b^2=0 \quad ;; \quad a^4=(b+1)^2\cdot b^2 \quad ;; \quad \underline{a^2=(b+1)\cdot b}$$

Basta con dar valores a b y obtener los correspondientes valores de a, por ejemplo:

$$\underline{\underline{b=0 \Rightarrow a=0}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{6}}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=-2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}}} \;\; \cdots\cdots$$

Para que Rango A = 4 es $-a^4+(b+1)^2 \cdot b^2 \neq 0 \;\; ;; \;\; a^4 \neq (b+1)^2 \cdot b^2$, que se cumple para infinitos valores, por ejemplo:

$$\underline{\underline{b=0 \Rightarrow a=1}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=1 \Rightarrow a=3}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=2 \Rightarrow a=5}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{b=-2 \Rightarrow a=3}} \;\; \cdots\cdots$$

****

2-B) a) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Averiguar se existe algún valor real de a de forma que $A^2-3A=-2I$, siendo I la matriz identidad.

b) Sea A cualquier matriz cuadrada tal que $A^2-3A=-2I$. Probar que A tiene inversa utilizando la ecuación dada para expresar A^{-1} en función de A.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 49+3a-18a & 7a+a^2-12 & -42-3a+30 \\ 21+3a-9a & 3a+a^2-6 & -18-3a+15 \\ 21a+6-15a & 3a^2+2a-10 & -18a-6+25 \end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix} 49-15a & a^2+7a-12 & -22-3a \\ 21-6a & a^2+3a-6 & -3-3a \\ 6+6a & 3a^2+2a-10 & 19-18a \end{pmatrix}=A^2}$$

$$-3A=-3\cdot\begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -21 & -3a & 18 \\ -9 & -3a & 9 \\ -9a & -6 & 15 \end{pmatrix}=-3A}$$

$$A^2-3A=-2I\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} 49-15a & a^2+7a-12 & -22-3a \\ 21-6a & a^2+3a-6 & -3-3a \\ 6+6a & 3a^2+2a-10 & 19-18a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -21 & -3a & 18 \\ -9 & -3a & 9 \\ -9a & -6 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ ;;$$

$$\begin{pmatrix} 28-15a & a^2+4a-12 & -4-3a \\ 12-6a & a^2-6 & 6-3a \\ 6-3a & 3a^2+2a-16 & 34-18a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ a=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}}}$$

b)

Sabiendo que para cualquier matriz A se cumple que $A^2-3A=-2I$, se puede hacer lo siguiente:

$$A\cdot(A-3I)=-2I\ \ ;;\ \ \frac{A\cdot(A-3I)}{-2}=\frac{A\cdot(3I-A)}{2}=I\ \ ;;\ \ \frac{I}{A}=\underline{\underline{A^{-1}=\frac{3I-A}{2}}}$$

$$3I-A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & -a & 6 \\ -3 & -a & 3 \\ -3a & -2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -a & 6 \\ -3 & 3-a & 3 \\ -3a & -2 & 8 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -a & 6 \\ -3 & 3-a & 3 \\ -3a & -2 & 8 \end{pmatrix}}}$$

****

BLOQUE 3

3-A) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=-3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+1=0$, se pide:

a) Determinar el punto P de intersección de r con π, y el punto Q en que la recta r corta al eje OZ.

b) Determinar el punto R que es simétrico de Q con respecto de π y la ecuación de la recta r' simétrica de r respecto del plano π.

c) Calcular el área del triángulo de vértices P, Q y R.

----

a)

El punto P de intersección de r con π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=-3 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-z+1=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ y-z=-3 \\ 2x+y-z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \ y=x \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-z=-3 \\ 2x+x-z=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x-z=-3 \\ 3x-z=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x+z=3 \\ 3x-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

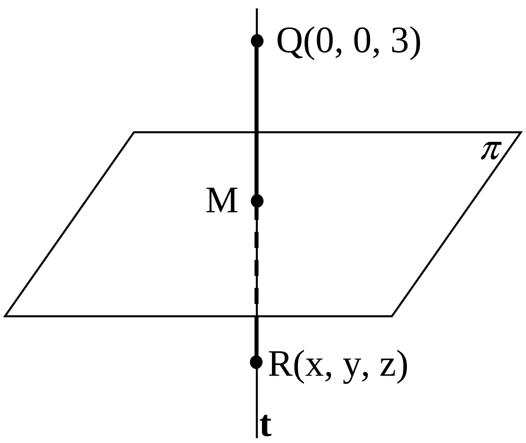
$$\Rightarrow\ 2x=2\ ;;\ \underline{x=y=1}\ ;;\ 3x-z=-1\ ;;\ 3+1=z\ ;;\ \underline{z=4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P(1,\ 1,\ 4)}}$$

El punto Q intersección de r con OZ se obtiene teniendo en cuanta que el eje OZ tiene por ecuación $OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=-3 \end{cases} \\ OZ \equiv \begin{cases} \underline{x=0} \\ \underline{y=0} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{z=3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Q(0,\ 0,\ 3)}}.$$

b)

Un vector normal al plano $\pi \equiv 2x+y-z+1=0$ es: $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ -1)$



La recta t es la que pasa por el punto $Q(0,\ 0,\ 3)$ y es perpendicular al plano π, por lo tanto su vector director pude ser el normal del plano, y entonces su ecuación es $t \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} t\equiv\begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \\ \pi\equiv 2x+y-z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2\lambda+\lambda-(3-\lambda)+1=0 \;;\; 4\lambda+\lambda-3+\lambda+1=0 \;;\; 6\lambda=2 \;;\; \underline{\lambda=\frac{1}{3}} \quad\Rightarrow$$

$$x=2\lambda=\underline{\frac{2}{3}=x} \;;\; \underline{y=\lambda=\frac{1}{3}} \;;\; z=3-\frac{1}{3}=\underline{\frac{8}{3}=z} \quad\Rightarrow\quad \underline{M\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{3}\right)}$$

Para que M sea el punto simétrico de Q con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MR} \;\Rightarrow\; M-Q=R-M \;;\; \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{3}\right)-(0,\ 0,\ 3)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{3}\right) \;;$$

$$\left(\frac{2}{3}-0,\ \frac{1}{3}-0,\ \frac{8}{3}-3\right)=\left(x-\frac{2}{3},\ y-\frac{1}{3},\ z-\frac{8}{3}\right) \;;\; \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)=\left(x-\frac{2}{3},\ y-\frac{1}{3},\ z-\frac{8}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}=x-\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \underline{x=\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}=y-\frac{1}{3} \;\rightarrow\; \underline{y=\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{3}=z-\frac{8}{3} \;\rightarrow\; \underline{z=\frac{7}{3}} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)}}$$

La recta r’ simétrica de r con respecto a π es la que pasa por los puntos P(1, 1, 4) y $R\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$. Su vector director es cualquier vector $\vec{v}$ que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PR}=R-P=\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)-(1,\ 1,\ 4)=\left(\frac{4}{3}-1,\ \frac{2}{3}-1,\ \frac{7}{3}-4\right)=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\vec{v}=(1,\ -1,\ -5)}$$

La recta pedida r’ dada por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{\underline{r'\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=4-5\lambda \end{cases}}}$.

c)

Los vectores de origen P que determinan el triángulo son:

$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0,\ 0,\ 3)-(1,\ 1,\ 4)=(-1,\ -1,\ -1) \;;\; \vec{v}=\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}\right).$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores que lo definen, o sea, la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores mencionados:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| 5i - j + k + k - i - 5j \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 4i - 6j + 2k \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left| 2i - 3j + k \right| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4+9+1} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{14} \cong 1'25\ u^2 = S_{PQR}}}$$

****

3-B) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ y+4z=5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x-y+2z=1$, se pide:

a) Comprobar que r y π son paralelos.

b) Calcular la distancia entre r y π.

c) Determinar, explicando el procedimiento utilizado, dos rectas distintas que estén *contenidas* en π y sean paralelas a r.

----

a)

Para que la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ y+4z=5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x-y+2z=1$ sean paralelos es necesario que el sistema que forman sea incompatible, es decir: que no tengan ningún punto en común.

El sistema que forman es $\left. \begin{array}{l} x+2z=3 \\ y+4z=5 \\ 3x-y+2z=1 \end{array} \right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de M es: $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2-6+4=0 \Rightarrow$ <u>Rango M = 2</u> .

Para determinar el rango de M' consideramos, en primer lugar, el determinante formado por las columnas $\{C_1,\ C_2,\ C_4\}$:

$Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-9+5=-3\neq 0 \Rightarrow$ <u>Rango M' = 3</u> .

$$\underline{Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3 \Rightarrow Sistema\ \ Incompatible}$$

$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ paralelos,\ como\ \ teníamos\ \ que\ \ demostrar.}}$$

b)

La distancia entre la recta r y el plano π es equivalente a la distancia de cualquier punto de r a π. Un punto de r es P(1, 1, 1).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$ y al punto P(1, 1, 1) es:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 1 + 2 - 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} \cong \underline{\underline{0'80\ u = d(r,\ \pi)}}$$

c)

La recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ expresada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$z = \lambda\ \ ;;\ \ x = 3 - 2\lambda\ \ ;;\ \ y = 5 - 4\lambda \ \Rightarrow\ \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 5 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de r puede ser, por ejemplo, $\overrightarrow{v} = (2,\ 4,\ -1)$.

Todas las rectas que tengan por vector director a $\overrightarrow{v} = (2,\ 4,\ -1)$ son paralelas a r; para que estas rectas paralelas estén contenidas en π, basta con determinar dos puntos de $\pi \equiv 3x - y + 2z = 1$, por ejemplo, A(1, 0, -2) y B(0, 1, 1).

Las rectas pedidas pueden ser $\underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}}}\quad y\quad \underline{\underline{r'' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}}.$

****