PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2001

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B). Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

BLOQUE 1

1-A) Sea $f(x)=\frac{1-x}{1-|x|}$. Se pide:

a) Dominio y cortes con los ejes.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y gráfica de la función.

La función $f(x)=\frac{1-x}{1-|x|}$ puede redefinirse de la forma: $f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} & si \;\; x<0 \\ \frac{1-x}{1-x}=1 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$.

a)

La función f(x) está definida para cualquier valor real de x, excepto para x = -1.

$$D(f) \Rightarrow R-\{-1\}$$

$f(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1-x}{1-|x|}=0 \;\Rightarrow\; x \notin D(f) \;\Rightarrow$ No corta al eje X.

$f(0)=1 \;\Rightarrow$ Corta al eje Y en el punto A(0, 1).

b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x}{1+x}=-1 \;\Rightarrow$ La recta y = -1 es asíntota horizontal en (-∞, 0).

Para x = -1 es $f(x)=\infty \Rightarrow$ <u>La recta x = -1 es asíntota vertical.</u>

Las tendencias de la asíntota vertical son las siguientes:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \Rightarrow \downarrow .$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \Rightarrow \uparrow .$$

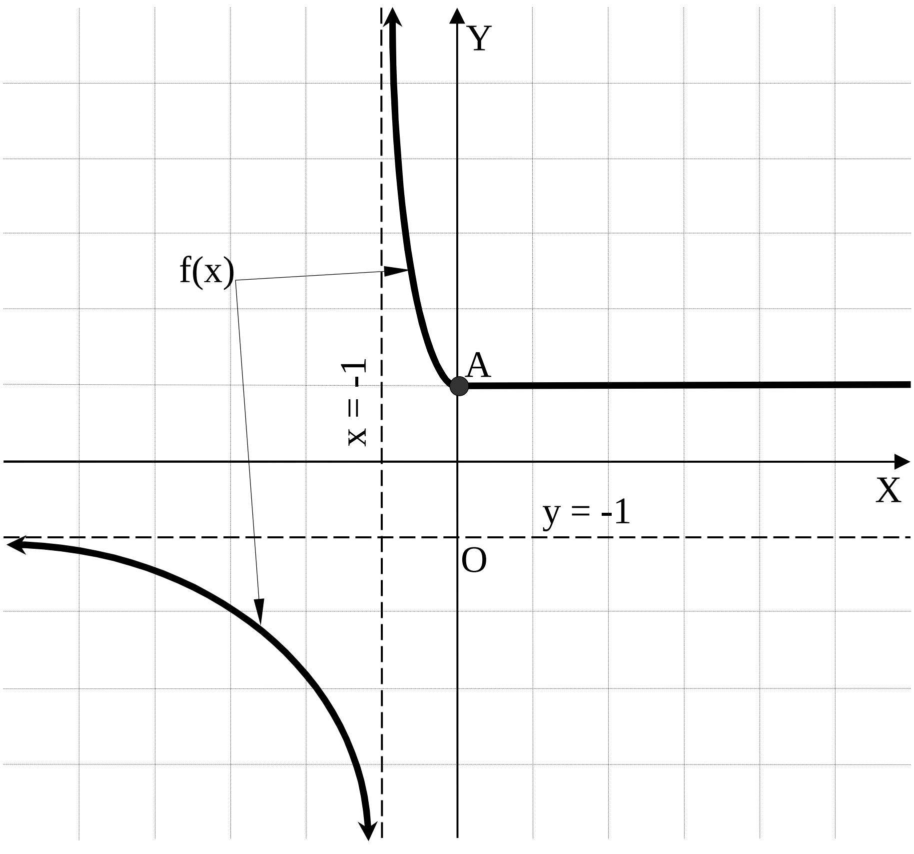
La función f(x) no tiene asíntotas oblicuas.

c)

Siendo $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$, es $g'(x)=\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2}$. (*)

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^2} & si\ \ x<0 \quad (*) \\ 0 & si\ \ x \geq 0 \end{cases} . \qquad \underline{f'(x)<0,\ \forall x \in (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 0)}.$$

<u>f(x) es decreciente en (-∞, -1)U(-1, 0). En (0, +∞) es constante.</u>



La representación gráfica, aproximada, es la indicada en la figura, donde se ha tenido en cuenta la continuidad de la función en el punto dudoso de x = 0, como se prueba a continuación.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 0^-}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to 0^-}{\text{lím}} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{1} = 1 \\[2ex] \underset{x \to 0^+}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to 0^+}{\text{lím}} 1 = f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underset{x \to 0^-}{\text{lím}} f(x) = \underset{x \to 0^+}{\text{lím}} f(x) = f(0)}.$$

****

1-B) a) Determinar los valores de α y b para los cuales la función $f(x)=a\,L\,x+bx^2+x$ tiene extremos relativos en los puntos x = 1 y x = 2. Averiguar si estos extremos son máximos o mínimos.

b) Con los valores obtenidos de α y b, calcular razonadamente el área del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 2.

----

a)

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que la derivada de la función se anule en ese punto,

$$f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1 \Rightarrow \begin{cases} f'(1)=0 \Rightarrow \frac{a}{1}+2b+1=0 \;;;\; \underline{a+2b=-1} \quad (1) \\ \\ f'(2)=0 \Rightarrow \frac{a}{2}+4b+1=0 \;;;\; a+8b+2=0 \;;;\; \underline{a+8b=-2} \quad (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=-1 \\ a+8b=-.2 \end{array}\right\} \Rightarrow -1-2b=-2-8b \;;;\; 6b=-1 \;;;\; \underline{\underline{b=-\frac{1}{6}}}.$$

$$a+2b=-1 \;;;\; a-\frac{2}{6}=-1 \;;;\; a-\frac{1}{3}=-1 \;;;\; 3a-1=-3 \;;;\; 3a=-2 \;;;\; \underline{\underline{a=-\frac{2}{3}}}.$$

La función resulta $f(x)=-\frac{2}{3}L\,x-\frac{1}{6}x^2+x$.

Para diferenciar los máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f'(x)=-\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}x+1 \;;;\; f''(x)=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}=\underline{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}.$$

$$f''(1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1^2}-1\right)=\frac{1}{3}>0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para x = 1.}}}$$

$$f''(2)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2^2}-1\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}<0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo relativo para x = 2.}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que la función $f(x)=-\frac{2}{3}L\,x-\frac{1}{6}x^2+x$ es continua en su dominio, que es (0, +∞) y que el punto mínimo es P(1, 5/6), todas las ordenadas de la función correspondiente al intervalo de la superficie a calcular son positivas, por lo cual, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^2 f(x)\cdot dx=\int_1^2\left(-\frac{2}{3}Lx-\frac{1}{6}x^2+x\right)\cdot dx.$$

Sabiendo que la integral de Lx es $\int Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Lx=u\rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dx=dv\rightarrow v=x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ Lx\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=xLx-\int dx=xLx-x=\underline{x(Lx-1)}$, la expresión anterior continúa de la forma siguiente:

$$S=\left[-\frac{2}{3}x(Lx-1)-\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot(L2-1)-\frac{2^3}{18}+\frac{2^2}{2}\right]-\left[-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot(L1-1)-\frac{1^3}{18}+\frac{1^2}{2}\right]=$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot L2+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+2+\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{2}{3}+\frac{1}{18}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}\cdot L2+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+2+\frac{1}{18}-\frac{1}{2}=\frac{-24L2+12-8+36+1-9}{18}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{31-24L2}{18}\cong 0'80\ u^2=S}}.$$

****

BLOQUE 2

2-A) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$. Comprobar que el determinante de A · B siempre es 0 y que pueden elegirse valores de α, b, c, d, e y f de formas que el determinante de B · A sea distinto de 0.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+4d & b+4e & e+4f\\ 2a+5d & 2b+5e & 2c+5f\\ 3a+6d & 3b+6e & 3c+6f\end{pmatrix}.$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}a+4d & b+4e & e+4f\\ 2a+5d & 2b+5e & 2c+5f\\ 3a+6d & 3b+6e & 3c+6f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b & e\\ 2a & 2b & 2c\\ 3a & 3b & 3c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4d & 4e & 4f\\ 5d & 5e & 5f\\ 6d & 6e & 6f\end{vmatrix}=0+0=\underline{0}$$

$\underline{\underline{|A\cdot B|=0,\ \forall a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in R}}$, (como queríamos comprobar).

Se han tenido en cuenta para hacer lo anterior las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

2ª.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es nulo.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c & 4a+5b+6c\\ d+2e+3f & 4d+5e+6f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 4a\\ d & 4d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b & 5b\\ 2e & 5e\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3c & 6c\\ 3f & 6f\end{pmatrix}.$$

$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix}a+2b+3c & 4a+5b+6c\\ d+2e+3f & 4d+5e+6f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 4a\\ d & 4d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2b & 5b\\ 2e & 5e\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3c & 6c\\ 3f & 6f\end{vmatrix}=0+0+0=\underline{0}.$$

En contra de lo que nos dice el enunciado:

$\underline{\underline{|B\cdot A|=0,\ \forall a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in R}}$, (aunque queríamos comprobar lo contrario).

****

2-B) a) Discutir el sistema $\left.\begin{aligned} x-y+3z=1 \\ 3x+ay+3z=7 \\ 2x+y+az=6 \end{aligned}\right\}$, según los valores de α.

b) Si para algún valor de α es compatible indeterminado, resolverlo en ese caso.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 3 & 7 \\ 2 & 1 & a & 6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & a & 3 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=a^2+9-6-6a-3+3a=a^2-3a=a(a-3)=0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\left\{\begin{aligned} a\neq 0 \\ a\neq 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}}$$

$$Para\;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1+F_3=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=0 \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=2<n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; indeterminado}}$$

$$Para\;\; a=3 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=18+3-14-6-7+18=39-27=12\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=3 \Rightarrow Rango\; M=2 \;;;\; Rango\; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α = 0 que el sistema $\left.\begin{aligned} x-y+3z=1 \\ 3x+3z=7 \\ 2x+y=6 \end{aligned}\right\}$ es compatible indeterminado.

Despreciando una de las ecuaciones (primera) y haciendo $\underline{x=\lambda}$: $\underline{y=6-2\lambda}$.

$3x + 3z = 7 \Rightarrow 3\lambda + 3z = 7$;; $3z = 7 - 3\lambda$;; $\underline{z = \frac{7}{3} - \lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 6 - 2\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = \frac{7}{3} - \lambda \end{cases}}}.$$

****

BLOQUE 3

3-A) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y-9=0 \\ y+z=-3 \end{cases}$ y el punto P(2, 1, 2).

a) Determinar la ecuación del plano perpendicular a r por P.

b) Entre todas las rectas del espacio que pasan por P y son ortogonales a r, determinar una recta s que no corte a r.

c) Hallar el punto de s que está más próximo a la recta r.

----

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2i+k-j=2i-j+k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(2,\ -1,\ 1)}.$$

El haz de planos β perpendiculares a r tiene una expresión general de la forma $\beta \equiv 2x-y+z+D=0$. De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto P(2, 1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2x-y+z+D=0 \\ P(2,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2-1+2+D=0 \ ;;\ 4+1+D=0 \ ;;\ \underline{D=-5}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-y+z-5=0}}$$

b)

Por ser el plano π perpendicular a la recta r, todas las infinitas rectas contenidas en π son perpendiculares a la recta r, por lo cual, para encontrar una recta s que cumpla la condición, basta encontrar una recta contenida en π y que no pase por P(2, 1, 2).

Los puntos de π son de la forma $Q(x,\ y,\ 5-2x+y)$; para encontrar dos puntos de π basta con dar valores arbitrarios a x e y; por ejemplo: $Q_1(0, 0, 5)$ y $Q_2(0, 1, 6)$.

Los puntos Q_1 y Q_2 determinan el vector $\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{Q_1Q_2}=Q_2-Q_1=(0,\ 1,\ 1)$.

La recta s dada por unas ecuaciones continuas es $\underline{\underline{s \equiv \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{1}}}$.

Nótese que la recta s no contiene al punto P(2, 1, 1) como se nos pedía.

c)

Una forma de hallar el punto de s más próximo a r es la siguiente.

El haz de planos α perpendiculares a s tiene por expresión general $\alpha \equiv y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano δ que contiene al punto P(2, 1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv y+z+D=0 \\ P(2,\ 1,\ 2)\end{array}\right\} \Rightarrow 1+2+D=0\ ;;\ 3+D=0\ ;;\ \underline{D=-3} \Rightarrow \underline{\delta \equiv y+z-3=0}.$$

El punto E de la recta s más próximo a la recta r es la intersección del plano δ con la recta s:

$$\left.\begin{array}{l}\delta \equiv y+z-3=0 \\ s \equiv \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y+z=3 \\ \underline{x=0} \\ y=z-5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=3-z \\ y=z-5\end{array}\right\} \Rightarrow 3-z=z-5\ ;;\ 8=2z\ ;;\ \underline{z=4}\ ;;\ \underline{y=-1}.$$

<u>El punto de s más próximo a r es E(0, -1, 4).</u>

****

3-B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 4x+2y-z=9 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ ax-2y=-2 \end{cases}$, determinar un valor de α para que las rectas r y s sean paralelas y otro valor de α para que r y s se crucen. Con el valor de α para el cual r y s son paralelas, calcular:

a) Ecuación del plano π que contiene a r y s.

b) El punto del plano π que está más próximo al origen de coordenadas.

Se hace el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por sus ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} 4x+2y-z=9 \\ x-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ ax-2y=-2 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M’, la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M’ = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M’ = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$Rango\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \to C_1 + C_2 \\ C_3 \to C_3 + 2C_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ a-2 & -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ a-2 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-a & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot [4+24-3(2-a)-4] = 3 \cdot (24-6+3a) = 3 \cdot (18+3a) = 8 \cdot (6+a) = 0 \Rightarrow \underline{a=-6}.$$

Para que las rectas r y s sean paralelas tiene que ser el Rango de M' = 3 y el rango de M = 2. Para que Rango M' = 3 tiene que ser α = -6.

Para α = -3 es $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Para determinar el rango de M tenemos en cuenta que la última fila es igual a la suma de las restantes. Considerando el menor formado por las tres primeras filas:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4-1+4-1-8+2=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=2}.$$

<u>Para α = -6 las rectas r y s son paralelas.</u>

Para α ≠ -6 el Rango de M' es 4 y el rango de M es 3.

<u>Para α ≠ -6 las rectas r y s se cruzan.</u>

a)

Para determinar un punto y un vector director de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+2y-z=9 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y-z=9-4\lambda \\ -y+2z=-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y-z=9-4\lambda \\ -2y+4z=-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3z=9-6\lambda \ ;;$$

$$\underline{z=3-2\lambda} \ ;; \ y=2z+\lambda=6-4\lambda+\lambda=\underline{6-3\lambda=y} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=6-3\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{A(0,\ 6,\ 3)} \ ;; \ \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ -3,\ -2)}.$$

Para determinar un punto de s la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ -6x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \ ;; \ \underline{y=1-3\lambda} \ ;; \ z=x+y=\lambda+1-3\lambda=$$

$$=\underline{1-2\lambda=z} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{P(0,\ 1,\ 1)}.$$

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PA}=A-P=(0,\ 6,\ 3)-(0,\ 1,\ 1)=(0,\ 5,\ 2)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -6x+5(z-1)+10x-2(y-1)=0\ ;;$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -6x+5(z-1)+10x-2(y-1)=0\ ;;$$

$4x-2(y-1)+5(z-1)=0\ ;;\ 4x-2y+2+5z-5=0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x-2y+5z-3=0}}$$

b)

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n}=(4,\ -2,\ 5)$.

La ecuación de la recta t, perpendicular al plano π y que pasa por el origen de coordenadas tiene la siguiente expresión: $t \equiv \begin{cases} x=4\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=5\lambda \end{cases}$.

El punto Q pedido es la intersección de la recta t y el plano π;

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 4x-2y+5z-3=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=4\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=5\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 4\lambda-2\cdot(-2\lambda)+5\cdot 5\lambda-3=0\ ;;\ 16\lambda+4\lambda+25\lambda-3=0\ ;;$$

$$45\lambda-3=0\ ;;\ 15\lambda-1=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{1}{15}} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{Q\left(\frac{4}{15},\ -\frac{2}{15},\ \frac{5}{15}\right)}}.$$

****