PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2002

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.
4.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) Discutir, según los valores de a, el sistema siguiente: $\left.\begin{aligned} x+ay+2z=3 \\ x-y-az=1 \\ 3x-ay=5 \\ 2ay+3z=2 \end{aligned}\right\}$. Si para algún valor de a es compatible determinado, resolverlo en este caso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & -a & 0 \\ 0 & 2a & 3 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -a & 1 \\ 3 & -a & 0 & 5 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M'|=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -a & 1 \\ 3 & -a & 0 & 5 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-3F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & -1-a & -a-2 & -2 \\ 0 & -4a & -6 & -4 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 2 \\ 4a & 6 & 4 \\ 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 1 \\ 2a & 3 & 1 \\ 2a & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'<4\ \ \forall a\in R \Rightarrow \{F_2=F_3\}}$$

Vamos a estudiar ahora el rango de M en función de a:

$$M' \Rightarrow \{L_1,\ L_2,\ L_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & -a & 0 \end{vmatrix} = -2a - 3a^2 + 6 - a^2 = -4a^2 - 2a + 6 = 0\ ;;$$

$$2a^2 + a - 3 = 0\ ;;\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 1} \\ \underline{a_2 = -\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$M' \Rightarrow \{L_1,\ L_2,\ L_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 0 & 2a & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4a + 2a^2 - 3a = 0\ ;;\ \underline{2a^2 + a - 3 = 0}$$

$$M' \Rightarrow \{L_2,\ L_3,\ L_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ 3 & -a & 0 \\ 0 & 2a & 3 \end{vmatrix} = -3a - 6a^2 + 9a = 0\ ;;\ \underline{2a^2 + a - 3 = 0}$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq -\frac{2}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Determinado$$

Por ser el sistema compatible determinado para cualquier otro valor de a, despreciamos una ecuación y resolvemos el sistema formado por las otras tres, por ejemplo, para a = 0:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{\underline{x = \frac{5}{3}}} \Rightarrow y = x - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} = y\ ;;\ 2z = 3 - x = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}\ ;;\ \underline{\underline{z = \frac{2}{3}}}$$

****

2-A) a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A^3=-A-I$ y calcular la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz de n filas y n columnas tal que $A^3=-A-I$ y se sabe que $\det(A)=m$, calcular el valor del determinante de A + I en función de m.

----

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=A^3} \\ A^3=-A-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=A^3} \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{IGUALES}}$$

Ahora vamos a calcular la matriz inversa de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\underline{-1}\ ;;\ A^T=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b)

$$A^3 = -A - I = -(A + I) \;;\; |A^3| = |-(A+I)| \;;\; |A|^3 = |-(A+I)| \quad (*)$$

Para determinar el determinante de la opuesta de una matriz debemos tener en cuenta que si se cambian de signo todos los elementos de una fila o una columna de un determinante, su valor cambia de signo. Tratándose de una matriz m x m, sería:

$$|-A| = (-1)^m \cdot |A|$$

En el caso que nos ocupa (*), es:

$$|-(A+I)| = (-1)^m \cdot |A+I| = |A|^3 \;;\; |A+I| = \frac{|A|^3}{(-1)^m} \Rightarrow |A+I| = (-1)^m \cdot |A|^3 = (-1)^m \cdot m^3$$

$$\underline{\underline{|(A+I)| = (-1)^m \cdot m^3}}$$

****

BLOQUE 2 (Análisis)

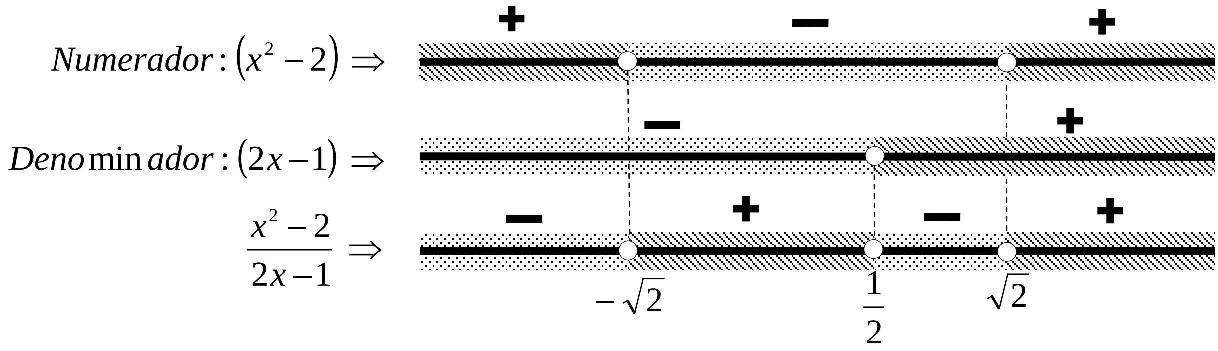
2-A) Sea la función $f(x) = L\,\frac{x^2-2}{2x-1}$. Se pide:

a) Dominio, cortes con los ejes y asíntotas.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) A partir de los datos anteriores, representar gráficamente la función.

----

a)

Para estudiar el dominio de la función tendremos en cuenta que los números negativos no tienen logaritmo, por lo tanto tiene que ser $\frac{x^2-2}{2x-1} > 0$. Como quiera que el signo de la anterior expresión depende del numerador y del denominador, estudiaremos la situación de forma gráfica, teniendo en cuenta que las raíces del numerador son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ y la del denominador es $\frac{1}{2}$.



$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow \left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},\ \infty\right)}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\begin{cases} \underline{Eje\ \ X} \Rightarrow y = f(x) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{x^2-2}{2x-1} = 1 \ ;; \ x^2 - 2 = 2x - 1 \ ;; \ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A\left(1+\sqrt{2},\ 0\right) \ ;; \ B\left(1-\sqrt{2},\ 0\right)}} \\ \underline{Eje\ \ Y} \Rightarrow x = 0 \ \Rightarrow y = f(0) = L\,2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C(0,\ L\,2)}} \end{cases}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(L\frac{x^2-2}{2x-1}\right)=L\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{2x-1}\right)=L\infty=\infty\Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Verticales: son los valores finitos x para los cuales f(x) tiende a infinito:

$2x-1=0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$. La tendencia es: $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{x^2-2}{2x-1}=+\infty$

$$\underline{\underline{x=-\sqrt{2}}}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\left(-\sqrt{2}\right)^+}\left(L\frac{x^2-2}{2x-1}\right)=-\infty$$

$$\underline{\underline{x=\sqrt{2}}}\quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^+}\left(L\frac{x^2-2}{2x-1}\right)=-\infty$$

Oblicuas: Son de la forma $y=mx+n\quad (m\neq 0\ \ ;\ \ m\neq\infty)$.

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{L\frac{x^2-2}{2x-1}}{x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow (L'Hopital)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{L\left(x^2-2\right)-L(2x-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-2}-\frac{2}{2x-1}}{1}=\frac{0-0}{1}=\underline{0=m}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

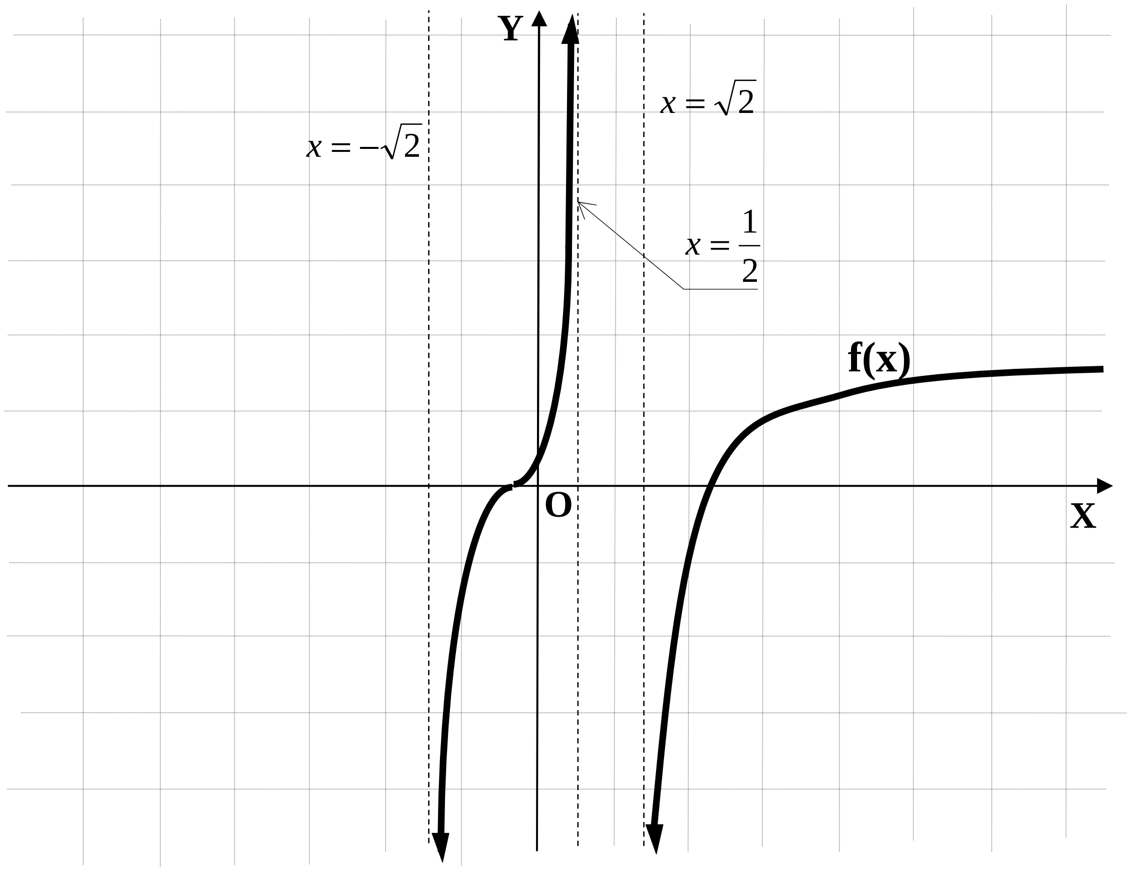
$$f(x)=L\frac{x^2-2}{2x-1}=L\left(x^2-2\right)-L(2x-1)\ \ ;;\ \ f'(x)=\frac{2x}{x^2-2}-\frac{2}{2x-1}=\frac{4x^2-2x-2x^2+4}{\left(x^2-2\right)(2x-1)}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+4}{\left(x^2-2\right)(2x-1)}=\underline{2\cdot\frac{x^2-x+2}{\left(x^2-2\right)(2x-1)}=f'(x)}$$

El numerador es positivo para cualquier valor real de x, por lo cual solamente estudiamos el denominador que, curiosamente, puede ser útil el estudio del dominio de la función, ya que los signos son exactamente los mismos, lo cual significa que:

La función es monótona creciente en su dominio c)

La representación aproximada de la función es la siguiente:



****

2-B) Expresar el número 60 como suma de tres números enteros positivos de forma que el segundo sea triple del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Sean los números: x, y, z, enteros y positivos.

$$P = x \cdot y \cdot z \;\Rightarrow\; Máximo$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ \underline{y=3x} \end{array}\right\} \Rightarrow x+3x+z=60 \;\;;;\;\; \underline{z=60-4x} \quad Sustituyendo\;\; en\;\; el\;\; producto:$$

$$P = x \cdot (3x) \cdot (60-4x) = 3x^2 \cdot (60-4x) = \underline{180x^2 - 12x^3 = P}$$

$$P' = 360x - 36x^2 = 36x(10-x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = 10} \end{cases}$$

El valor de x = 0 carece de sentido lógico. (es para mínimo). La solución lógica es para x = 10, cosa que vamos a justificar:

$$P' = 360x - 36x^2 \;\;;;\;\; P'' = 360 - 72x \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} P''(0) = 360 > 0 \;\Rightarrow\; Mínimo \\ \\ P''(10) = 360 - 720 < 0 \;\Rightarrow\; Máximo \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Los\;\; números\;\; son\;\; x=10,\;\; y=30,\;\; z=40}}$$

$$\underline{\underline{Su\;\; producto\;\; es\;\; P = 10 \cdot 30 \cdot 40 = 1200}}$$

****

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+2y=2 \\ x=-2z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=-y \\ y=z+1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto P en que se cortan y la ecuación del plano π que las contiene.
b) Calcular la ecuación de la recta s que pasa por el punto Q(2, 0, 1) y corta perpendicularmente a r_1.
c) Obtener las coordenadas del punto R, intersección de r_1 y s, y el área del triángulo de vértices P, Q, R.

----

a)

Las expresiones por unas ecuaciones paramétricas de las rectas r_1 y r_2 son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+2y=2 \\ x=-2z \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \underline{x=-2k} \;;;\; 2y=2-x=2+2k \;;;\; \underline{y=1+k} \Rightarrow \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x=-2k \\ y=1+k \\ z=k \end{cases}}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x=-y \\ y=z+1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \underline{y=1+k} \;;;\; x=-y=\underline{-1-k=x} \Rightarrow \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x=-1-k \\ y=1+k \\ z=k \end{cases}}$$

Sabiendo que se cortan, para hallar su punto de corte se obtiene igualando su punto genérico:

$$\begin{Bmatrix} x=-2k \\ y=1+k \\ z=k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x=-1-k \\ y=1+k \\ z=k \end{Bmatrix} \Rightarrow -2k=-1-k \;;;\; \underline{k=1} \Rightarrow \underline{\underline{P(-2,\,2,\,1)}}$$

Dos vectores directores de las rectas son: $\begin{cases} r_1 \to \underline{\overrightarrow{u}=(-2,\,1,\,1)} \\ r_2 \to \underline{\overrightarrow{v}=(-1,\,1,\,1)} \end{cases}$

El plano π pasa por un punto cualquiera de una de las rectas, por ejemplo P, y tiene como vectores a los de las rectas:

$$\pi(P;\; \overrightarrow{u},\; \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$(x+2)-(y-2)-2(z-1)+(z-1)-(x+2)+2(y-2)=0 \;;;\; (y-2)-(z-1)=0$$

$$y-2-z+1=0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv y-z-1=0}}$$

b)

El plano α perpendicular a la recta r_1 tiene como vector normal al vector director de la recta, $\overrightarrow{u} = (-2, 1, 1)$:

$\alpha \equiv -2x + y + z + D = 0$; por pasar por Q(2, 0, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$-4 + 0 + 1 + D = 0 \;\;;;\;\; D = 3 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha \equiv 2x - y - z - 3 = 0}$$

El punto R de corte de α con r_1 es:

$$2(-2k) - (1 + k) - k - 3 = 0 \;\;;;\;\; -4k - 1 - k - k - 3 = 0 \;\;;;\;\; 6k = -4 \;\;;;\;\; 3k = -2 \;\;;;\;\; \underline{k = -\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x = -2k = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ y = 1 + k = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = k = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{R\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$$

La recta s pedida es la que pasa por los puntos R y Q:

$$\overrightarrow{QR} = Q - R = (2, 0, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{w} = (2, -1, 5)}$$

El vector $\vec{w}$ es director de s por ser linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QR}$.

$$s \Rightarrow \{Q, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2k \\ y = -k \\ z = 1 + 5k \end{array} \right.}}$$

c)

El puno $R\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ya se calculó en el apartado anterior.

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\underline{\overrightarrow{QR} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)} \;\; y \;\; \overrightarrow{QP} = P - Q = (-2, 2, 1) - (2, 0, 1) = \underline{(-4, 2, 0) = \overrightarrow{QP}}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QP}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{QR}\wedge\overrightarrow{QP}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -4 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\cdot\left| -10j + 2k - 2k - 5i \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left| -5i - 10j \right| = \frac{5}{3}\cdot\left| -i - 2j \right| = \frac{5}{3}\cdot\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \frac{5}{3}\cdot\sqrt{5} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{5}}{3}\ u^2 = S_{PQR}}}$$

****

3-B) Se considera el plano $\pi \equiv -`x + 2y + z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z-3$ y el punto A(1, 0, 2).

a) Obtener la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto A, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

b) Determinar, si es posible, un plano π_2 perpendicular a π que pase por A y que no sea paralelo a r.

----

a)

El plano π_1 pedido tiene los siguientes vectores directores: el normal al plano π, $\overrightarrow{u} = (-1,\ 2,\ 1)$ y el vector director de r, $\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 1)$ y pasa por A(1, 0, 2):

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$2(x-1) + 3y - 2(z-2) - 6(z-2) - 2(x-1) + y = 0 \ ;; \ 4y - 8(z-2) = 0 \ ;;$$

$$4y - 8z + 16 = 0 \ ;; \ \underline{\underline{\pi_1 \equiv y - 2z + 4 = 0}}$$

b)

El plano π_2 pedido tiene los siguientes vectores directores: el normal al plano π, $\overrightarrow{u} = (-1,\ 2,\ 1)$ y cualquier vector que sea linealmente independiente del vector director de la recta r, por ejemplo, $\overrightarrow{w} = (1,\ 1,\ 1)$ y también pasa por A(1, 0, 2):

$$\pi_2\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$2(x-1) + y - (z-2) - 2(z-2) - (x-1) + y = 0 \ ;; \ (x-1) + 2y - 3(z-2) = 0 \ ;;$$

$$x - 1 + 2y - 3z + 6 = 0 \ ;; \ \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + 2y - 3z + 5 = 0}}$$

****