PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2002

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.
4.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

Sumando la primera fila a todas las demás, resulta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x-2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = x_2 = 0}} \\ \underline{\underline{x_3 = 1}} \\ \underline{\underline{x_4 = 2}} \end{cases}$$

****

2-A) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ b & a & 1 & -1 \\ a & -1 & a & 0 \\ -2 & -b & a & 0 \end{pmatrix}$, determinar a y b para que $A^T=-A$, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

b) Para los valores a y b obtenidos, calcular $\det(A)$, $\det\left(A^T\right)$ y $\det(3A)$.

----

a)

$$-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -b & -a & -1 & 1 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 2 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad A^T=\begin{pmatrix} 0 & b & a & -2 \\ 1 & a & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=-A \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & a & -2 \\ 1 & a & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -b & -a & -1 & 1 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 2 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{\underline{b=-1}} \\ \\ \underline{\underline{a=0}} \end{matrix}\right\}$$

b)

$$Para \ \left\{\begin{matrix} a=0 \\ b=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \langle 1 \rangle & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \langle -2 \rangle & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot 2=\underline{\underline{-4=|A|}}$$

$$\left|A^T\right|=|A|=\underline{\underline{-4=\left|A^T\right|}}$$

$$|3A|=3^4\cdot|A|=3^4\cdot(-4)=81\cdot -4=\underline{\underline{-324=|3A|}}$$

****

BLOQUE 2 (Análisis)

2-A) Dada la función $f(x) = x - \sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$, se pide:

a) Dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Área del recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas x = 0 y x = 3.

----

a)

El dominio de f(x) es el conjunto de valores reales de x, tales que: $\dfrac{2}{x+1} > 0$.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-1, \infty)}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\underline{Eje\ \ X} \Rightarrow y = f(x) = 0 \ \Rightarrow \ x - \sqrt{\frac{2}{x+1}} = 0 \ \ ;; \ \ x = \sqrt{\frac{2}{x+1}} \ \ ;; \ \ x^2 = \frac{2}{x+1} \ \ ;; x^3 + x^2 - 2 = 0$$

Aplicando Ruffini:

	1	1	0	-2
1		1	2	2
	1	2	2	$\boxed{0}$

El único valor real de x es el hallado. El punto de corte es <u>A(1, 0)</u>

$$\underline{Eje\ \ Y} \Rightarrow x = 0 \ \Rightarrow y = f(0) = 0 - \sqrt{\frac{2}{0+1}} = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B\left(0,\ -\sqrt{2}\right)}}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

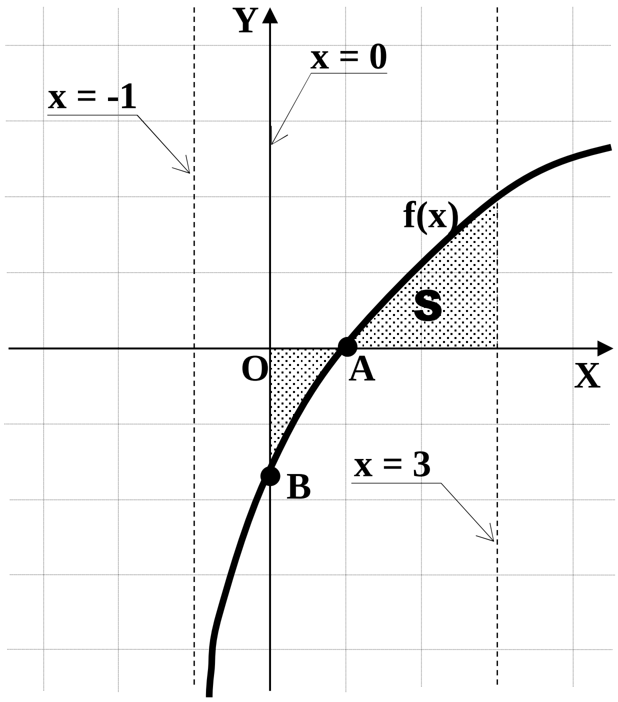
$$f(x) = x - \sqrt{\frac{2}{x+1}} = x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \ \ ;; \ \ f'(x) = 1 - \frac{-\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = 1 + \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \underline{1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2} = f'(x)} \ \ ;; \ \ \underline{\underline{f'(x) > 0,\ \forall x \in D(f)}}$$

<u>La función es monótona creciente en su dominio.</u>

b)

Para calcular el área del recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas x = 0 y x = 3, hacemos una representación aproximada de la situación:



$$S=\int_{1}^{0} f(x)\cdot dx+\int_{1}^{3} f(x)\cdot dx=\left[F(x)\right]_{1}^{0}+\left[F(x)\right]_{1}^{3}=F(0)-F(1)+F(3)-F(1)=$$

$$=F(0)-2F(1)+F(3)=S \qquad (*)$$

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\left(x-\sqrt{\frac{2}{x+1}}\right)\cdot dx=\int x\cdot dx-\int\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}\cdot dx=\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{x^2}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{x^2}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{t}=\underline{\frac{x^2}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{x+1}=F(x)}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de F(x):

$$S=F(0)-2F(1)+F(3)=\left(0-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{1}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{4}\right)=$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)+\frac{9}{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}=-\frac{6\sqrt{2}}{3}-1+\frac{8}{3}+\frac{9}{2}=\frac{16+27-6-12\sqrt{2}}{6}=\frac{37-12\sqrt{2}}{6}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{37}{6}-2\sqrt{2}\ u^2\cong 3'24\ u^2=S}}$$

****

2-B) Se consideran todos los pares de números reales positivos x, y, tales que $x \cdot y = 2002$. Se pide:

a) Determinar el par x, y cuya suma x + y es mínima y calcular el valor de dicha suma.

b) Probar que entre todos los pares existentes, puede elegirse x, y de forma que x + y sea tan grande como se quiera.

----

a)

$$P = x \cdot y = 2002 \;\; ;; \;\; \underline{y = \frac{2002}{x}}$$

$$S = x + y = x + \frac{2002}{x} = \frac{x^2 + 2002}{x}$$

$$S' = \frac{2x \cdot x - \left(x^2 + 2002\right)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2002}{x^2} = \frac{x^2 - 2002}{x^2} \;\; ;; \;\; S' = 0 \Rightarrow x^2 - 2002 = 0 \;\; ;;$$

$$x^2 = 2002 \;\; ;; \;\; x = \pm\sqrt{2002} \;\; ;; \;\; x > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = \sqrt{2002}}} \;\; ;; \;\; y = \frac{2002}{x} = \frac{2002}{\sqrt{2002}} = \underline{\underline{\sqrt{2002} = y}}$$

La suma mínima es:

$$S = \sqrt{2002} + \sqrt{2002} = \underline{\underline{2\sqrt{2002} = S}}$$

b)

En efecto, de todos los pares elegidos pueden elegirse un par x, y tal que su suma sea tan grande como queramos.

Siendo $y = \frac{2002}{x}$, haciendo x infinitamente pequeña, y se hace infinitamente grande, es decir:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{2002}{x} = \infty$$

****

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+2z=5 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que r y s están en un mismo plano π.

b) Determinar la posición de la recta $t \equiv x = y+1 = -z-2$ respecto del plano π y respecto de la recta s.

c) Ecuación de la recta r', paralela a r, que se corta con s y con t.

----

a)

En primer lugar expresamos las rectas r y s en ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow 2y=k \;;\; \underline{y=\frac{1}{2}k} \;;\; x=1+2y=\underline{1+k=x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+k \\ y=\frac{1}{2}k \\ z=k \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \underline{y=5-2k} \;;\; x=7-2y-z=7-10+4k-k=$$

$$=\underline{-3+3k=x} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-3+3k \\ y=5-2k \\ z=k \end{cases}$$

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ 2) \\ A(1,\ 0,\ 0) \end{cases} \;;\; s \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v}=(3,\ -2,\ 1) \\ B(-3,\ 5,\ 0) \end{cases}$$

Si las rectas están contenidas en el mismo plano, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-3,\ 5,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=\underline{(-4,\ 5,\ 0)=\overrightarrow{w}}$$

$$Rango\ \ de\ \ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 30-4-16-10=0$$

$$\underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ están\ \ en\ \ un\ \ mismo\ \ plano\ \ \pi,\ \ \ c.q.d.}}$$

b)

El plano π puede determinarse por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y, por ejemplo, el punto A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0\ \ ;;\ \ (x-1)+6y-4z-3z+4(x-1)-2y=0\ \ ;;$$

$$5(x-1)+4y-7z=0\ \ ;;\ \ 5x-5+4y-7z=0\ \ ;;\ \ \underline{\pi \equiv 5x+4y-7z-5=0}$$

Para estudiar la posición relativa de $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y $\pi \equiv 5x+4y-7z-5=0$, en primer lugar expresamos la recta t por unas ecuaciones continuas, es decir, por la intersección de dos planos:

$$t \equiv \begin{cases} x = y+1 \\ -x = z+2 \end{cases}\ \ ;;\ \ t \equiv \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+z+2=0 \end{cases}$$

$$\{\pi,\ t\} \Rightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+z+2=0 \\ 5x+4y-7z-5=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}\ ;;\ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|\,M\,| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -5-4-7=-16 \neq 0$$

$$\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ \det er\min ado}$$

$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ t\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ \sec antes}}$$

A diferencia del estudio de la posición relativa anterior, el estudio de la posición relativa de las rectas s y t lo vamos a realizar por sus vectores directores.

$$t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1} \;\;;;\;\; s \equiv \begin{cases} x = -3+3k \\ y = 5-2k \\ z = k \end{cases}$$

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$t \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{c} = (1,\ 1,\ -1) \\ \\ P(0,\ -1,\ -2) \end{cases} \;\;;;\;\; s \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v} = (3,\ -2,\ 1) \\ \\ B(-3,\ 5,\ 0) \end{cases}$$

Los vectores $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, por lo cual las rectas se cortan o se cruzan.

Si las rectas se cortan están en un mismo plano y los vectores $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{BP}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{PB} = P - B = (0,\ -1,\ -2) - (-3,\ 5,\ 0) = \underline{(3,\ -6,\ -2) = \overrightarrow{d}}$$

$$Rango\ \ de\ \ \left\{\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{d}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 18 + 3 - 6 + 6 + 6 = 31 \neq 0$$

<u>Las rectas t y s se cruzan</u>

c)

La recta r’ pedida viene determinada por la intersección de dos planos; uno de ellos es π, intersección de r y s; el otro π', es un plano que tiene como vectores los de las rectas t y r’ (r) y que contiene a t, o sea, vectores directores de t y r y un punto de t:

$$\pi'\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{c}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -x + 2(y+1) + 2(z+2) - (z+2) - 2x + 2(y+1) = 0 \;\;;;$$

$$-3x + 4(y+1) + (z+2) = 0 \;\;;;\;\; -3x + 4y + 4 + z + 2 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\pi' \equiv 3x - 4y - z - 6 = 0}$$

$$\underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} 5x + 4y - 7z - 5 = 0 \\ 3x - 4y - z - 6 = 0 \end{cases}}}$$

****

3-B) Se consideran los puntos A(4, 0, -1) y B(1, 0, 0). Se pide:
a) Ecuación de la recta r determinada por los puntos A y B y de la recta t paralela a r por el punto P(1, 1, 1)
b) Ecuación del plano π que contiene a las rectas r y t.
c) Determinar algún punto C del plano π de forma que los puntos A, B, C formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C.

----

a)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 0) - (4,\ 0,\ -1) = \underline{(-3,\ 0,\ 1) = \overrightarrow{u}}$$

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-3,\ 0,\ 1) \\ \\ A(4,\ 0,\ -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 4 - 3k \\ y = 0 \\ z = -1 + k \end{array} \right.}} \quad ;; \quad t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (-3,\ 0,\ 1) \\ \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3k \\ y = 1 \\ z = 1 + k \end{array} \right.}}$$

b)

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 1,\ 1) - (4,\ 0,\ -1) = \underline{(-3,\ 1,\ 2) = \overrightarrow{v}}$$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3(y-1) - 3(z-1) - (x-1) + 6(y-1) = 0 \ ;;$$

$$-(x-1) + 3(y-1) - 3(z-1) = 0 \ ;;\ -x + 1 + 3y - 3 - 3z + 3 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x - 3y + 3z - 1 = 0}}$$

c)

Sea C(x, y, z) un punto del plano π. Tiene que ser: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A(4,\ 0,\ -1) \\ B(1,\ 0,\ 0) \\ C(x,\ y,\ z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = C - A = (x,\ y,\ z) - (4,\ 0,\ -1) = (x-4,\ y,\ z+1) \\ \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (x,\ y,\ z) - (1,\ 0,\ 0) = (x-1,\ y,\ z) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \ \Rightarrow\ (x-4,\ y,\ z+1) \cdot (x-1,\ y,\ z) = 0 \ ;;\ (x-4)(x-1) + y^2 + z(z+1) = 0 \ ;;$$

$$x^2 - 5x + 4 + y^2 + z^2 + z = 0 \ ;;\ \underline{x^2 + y^2 + z^2 - 5x + z + 4 = 0} \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que el punto tiene que pertenecer a π, con su ecuación y (*) formamos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo fijamos una de las incógnitas, por ejemplo, z = 0, con lo cual resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-5x+4=0 \\ x-3y-1=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=3y+1 \quad \Rightarrow \quad (3y+1)^2+y^2-5(3y+1)+4=0 \;\;;;$$

$$9y^2+6y+1+y^2-15y-5+4=0 \;\;;;\; 10y^2-9y=0 \;\;;;\; y(10y-9)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=\dfrac{9}{10} \end{cases}$$

La primera solución nos proporciona una solución ilógica, ya que el punto C coincide con el punto B(1,0, 0) por lo tanto, consideramos la solución $y=\frac{9}{10}$, que resulta el punto siguiente:

$$x=3y-1=\frac{27}{10}+1=\underline{\frac{37}{10}=x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C\left(\frac{37}{10},\,\frac{9}{10},\,0\right)}}$$

****