# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

# SEPTIEMBRE - 2003

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

## BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) a ) Estudiar, según los valores de a, el sistema siguiente: $\left.\begin{array}{r} ax+y+2z=1 \\ x-2y=0 \\ ax+y-z=1 \end{array}\right\}$.

b ) Resolver el sistema para a = 1.

----------

a )

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix}=2a+2+4a+1=6a+3=3(2a+1)=0 \Rightarrow \underline{a=-\frac{1}{2}}$$

$$Para\ \ a\neq-\frac{1}{2} \Rightarrow Rango\, M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ \ determinado}$$

$Para \;\; a = -\frac{1}{2} \;\; el \;\; rango \;\; de \;\; M' \;\; es:$

$$\left.\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1-1=0 \\ \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2=-3 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rango \;\; M' = 3}$$

$$Para \;\; a = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rango\, M \neq Rango \;\; M' \Rightarrow \underline{Incompatible}$$

b )

Para a = 1 el sistema es: $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=1 \\ x-2y=0 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$. De la segunda ecuación: x = 2y. Sustituyendo en las ecuaciones primera y tercera, resulta: $\left.\begin{array}{r} 3y+2z=1 \\ 3y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{z=0}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{y=\frac{1}{3}}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{x=\frac{2}{3}}}$$

**********

2-A) Dar una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

a ) En una matriz intercambiamos dos filas. ¿Qué se puede decir del determinante de la nueva matriz obtenida?

b ) Se sabe que det (A) = 5 y que A es una matriz de orden dos. ¿Cuánto vale det (3A)?

c ) Dos matrices A y B son inversas una de la otra. ¿Cuánto vale det (B)?

d ) Si A es una matriz inversible de orden 3. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz adjunta de A?

----------

a )

Una de las propiedades de los determinantes es que "si se intercambian dos filas o dos columnas, el valor del determinante cambia de signo".

<u>El valor del determinante de la matriz obtenida es el mismo del determinante de la primera matriz, pero de signo contrario.</u>

b )

El producto de una matriz por un número es otra matriz cuyos elementos resultan de multiplicar cada elemento de la primera matriz por el número.

Otra propiedad de los determinantes: "si se multiplican o dividen los elementos de una fila o una columna de un determinante, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por el número".

Siendo A una matriz cuadrada de orden 2, det (3A) = 3 · 3 · det (A) = 9 · det (A).

$$\det(3A) = 9 \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = 5 \Rightarrow \det(3A) = 9 \cdot 5 = \underline{\underline{45 = \det(3A)}}$$

c )

Sabemos que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. Si B es la matriz inversa de A se cumple: A · B = I.

$$|A \cdot B| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{|B| = \frac{1}{|A|}}}$$

De lo anterior se deduce que el determinante de la inversa de una matriz es igual a la inversa del determinante de la matriz dada.

d )

Sabiendo que: $A \cdot Adj.(A) = |A| \cdot I$ , para una matriz de orden 3 sería:

$$A \cdot Adj.(A) = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}.$$

Pasando a determinantes:

$$|A| \cdot |Adj.(A)| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3 \quad \Rightarrow \; |Adj.(A)| = \frac{|A|^3}{|A|} = |A|^2$$

$$\underline{\underline{|Adj.(A)| = |A|^2}}$$

**********

**BLOQUE 2 (Análisis)**

2-A) Considerar la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$. Calcular:

a ) Su dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento.

b ) Sus asíntotas.

c ) A partir de los datos anteriores, representar gráficamente la función.

----------

a )

El dominio de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ es el conjunto de valores reales de x tales que $x^2-1\geq 0$ ;; $x^2\geq 1$ ;; $|x|\geq 1$.

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\begin{cases} \underline{Eje\ \ X} \Rightarrow y=f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=0 \ ;;\ x=\pm 1 \Rightarrow \underline{\underline{A(-1,\ 0)\ ;;\ B(1,\ 0)}} \\ \\ \underline{Eje\ \ Y} \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=f(0)=\sqrt{-1} \Rightarrow x\notin R \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{No\ \ tiene}} \end{cases}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x)>0\Rightarrow x>0 \Rightarrow (1,\ \infty)\Rightarrow Creciente}} \\ \\ \underline{\underline{f'(x)<0\Rightarrow x<0 \Rightarrow (-\infty,\ -1)\Rightarrow Decreciente}} \end{cases}$$

b )

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

<u>No tiene asíntotas verticales</u>

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n \quad (m \neq 0 \;;\; m \neq \infty)$.

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \underline{1 = m_1}$$

$$n_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)}{\sqrt{x^2-1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y_1 = x}}$$

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

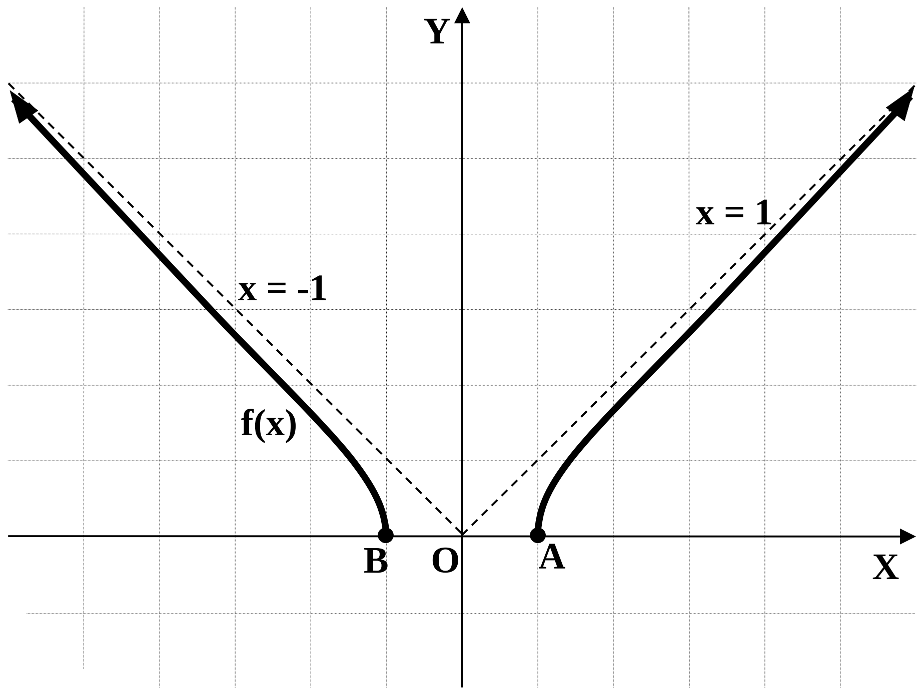
$$= -1 \cdot 1 = \underline{-1 = m_2}$$

$$n_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1} + x\right)\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)}{\sqrt{x^2-1} - x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = \frac{-1}{\infty + \infty} = \frac{-1}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y_2 = -x}}$$

c )

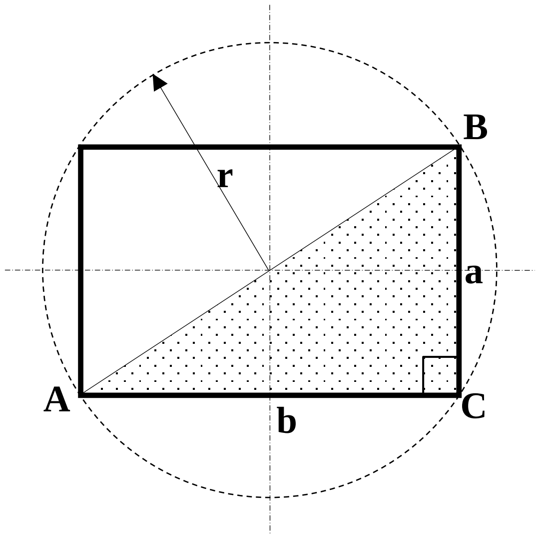
La representación aproximada de la función es la siguiente:




**********

2-B) Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 2 m de radio.

----------




El área del rectángulo es: $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Del triángulo rectángulo ABC se deduce que:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \;\;;;\;\; 4r^2 = a^2 + b^2 \;\;;;\;\; \underline{b = \sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Sustituyendo el valor de b en el área:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} a \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2a^2 - a^4}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8r^2a - 4a^3}{2\sqrt{4r^2a^2 - a^4}} = \frac{2r^2a - a^3}{\sqrt{4r^2a^2 - a^4}} = 0 \Rightarrow 2r^2a - a^3 = 0 \;\;;;\;\; a\left(2r^2 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \underline{a_2 = r\sqrt{2}} \end{cases}$$

La primera de las soluciones carece de sentido lógico. (sería para mínimo).

Los valores de a y b son: $\underline{\underline{a = r\sqrt{2}}}$.

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r\sqrt{2} = b = a}}.$$

Como puede comprobarse, se trata de un cuadrado.

El valor del área máxima es:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\left(r\sqrt{2}\right)\cdot\left(r\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{2r^2}{2} = r^2 = 2^2 = 4$$

<u>El valor del área máxima es 4 m$^2$.</u>

**********

**BLOQUE 3 (Geometría)**

3-A) Se consideran los puntos P(2, 1, -1), Q(1, 4, 1) y R(1, 3, 1).

a ) Comprobar que P, Q y R no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan.

b ) Calcular la ecuación del plano $\pi$ que los contiene a los puntos P, Q y R.

c ) Calcular la ecuación de la recta r que pasa por A(1, 1, -1) y es perpendicular al plano $\pi$ obtenido en el apartado anterior.

----------

a )

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 4,\ 1) - (2,\ 1,\ -1) = (-1,\ 3,\ 2)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = (1,\ 3,\ 1) - (1,\ 4,\ 1) = (0,\ -1,\ 0)$$

Como puede apreciarse, los vectores $\overrightarrow{u}$ $y$ $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa, en efecto, que los puntos P, Q y R no están alineados, como teníamos que comprobar.

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}$ $y$ $\overrightarrow{v}$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |k - 2i| = \frac{1}{2} \cdot |-2i + k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}\, u^2 = S}}$$

b )

El plano $\pi$ pedido es el que tiene como vectores directores $\overrightarrow{u}$ $y$ $\overrightarrow{v}$ y contiene a uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo P:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (z+1) + 2(x-2) = 0 \ ;;\ z + 1 + 2x - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + z - 3 = 0}}$$

c )

La recta r pedida tiene como vector director a un vector normal del plano $\pi$:

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = (2,\ 0,\ 1) \\ A(1,\ 1,\ -1) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2k \\ y = 1 \\ z = -1 + k \end{array} \right.}}$$

**********

3-B) Se considera el segmento $\overline{AB}$ de extremos A(5, 3, 1) y B(4, 2, -1).

a ) Calcular las ecuaciones de los tres planos (paralelos entre si) siguientes:

- $\pi_1$: pasa por A y es perpendicular al segmento $\overline{AB}$.
- $\pi_2$: pasa por B y es perpendicular al segmento $\overline{AB}$.
- $\pi_3$: es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ y lo divide en dos partes iguales.

b ) ¿Cuál es la distancia entre $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_3$? ¿Cuál es la distancia entre $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$?

----------

a )

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 2,\ -1) - (5,\ 3,\ 1) = (-1,\ -1,\ -2).$$

El vector $\overrightarrow{v}$ es normal los planos $\pi_1,\ \pi_2 \;\; y \;\; \pi_3$, por lo cual sus ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ A(5,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow -5 - 3 - 2 + D = 0 \;;;\; D = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + y + 2z - 10 = 0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ B(4,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -4 - 2 + 2 + D = 0 \;;;\; D = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y + 2z - 4 = 0}}$$

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es: $\left\{\begin{array}{l} A(5,\ 3,1) \\ B(4,\ 2,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{9}{2},\ \frac{5}{2},\ 0\right)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_3 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ M\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2},0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} - 0 + D = 0 \;;;\; D = 7 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y + 2z - 7 = 0}}$$

b )

Para hallar la distancia de $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_3$ la obtenemos tomando un punto, por ejemplo de $\pi_1$ y calculando su distancia a $\pi_3$:

Un punto de $\pi_1$ es A(5, 3, 1) y la distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula: $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. El plano es: $\pi_3 \equiv x + y + 2z - 7 = 0$.

$$d(\pi_1,\ \pi_3) = d(A,\ \pi_3) = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 3 + 2 - 7|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u = d(\pi_1,\ \pi_3)}}$$

Para hallar la distancia de $\pi_1$ $y$ $\pi_2$ la obtenemos tomando un punto, por ejemplo de $\pi_1$ y calculando su distancia a $\pi_2$:

Un punto de $\pi_1$ es A(5, 3, 1). El plano es: $\pi_2 \equiv x + y + 2z - 4 = 0$.

$$d(\pi_1,\ \pi_2) = d(A,\ \pi_2) = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 3 + 2 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(\pi_1,\ \pi_2)}}$$

**********