PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2004

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A)

a) Estudiar, según el valor de k, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Calcular, si es posible, un valor de k para que el sistema siguiente sea compatible determinado. Justificar la respuesta.

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Lo mismo que en b), pero para que el sistema sea compatible indeterminado.

d) Lo mismo que en b), pero para que el sistema sea incompatible.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(k+1)^2 + 1 = -k^2 - 2k - 1 + 1 = -k^2 - 2k = -k(k+2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{k_1 = 0}$;; $\underline{k_2 = -2}$

$$Para \ \left\{ \begin{matrix} k \neq 0 \\ k \neq -2 \end{matrix} \right\} \ el \ rango \ de \ A \ es \ 3.$$

Veamos el rango de la matriz para los valores que anulan su determinante:

$$\left. \begin{matrix} Para \ \ k = 0 \ \Rightarrow \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ Para \ \ k = -2 \ \Rightarrow \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{Rango \ \ de \ \ A = 2}$$

$$Para \ \left\{ \begin{matrix} k = 0 \\ k = -2 \end{matrix} \right\} \ el \ rango \ de \ A \ es \ 2.$$

b)

La ecuación es equivalente al sistema lineal siguiente:

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x + y = k+2 \\ (k+1)y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan rango tres. Como ya hemos determinado en el apartado anterior que el rango de A es tres para cualquier valor real de k distinto de 0 y de -2, basta con encontrar un valor de k que haga que el rango de A’ sea tres.

$$A' = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & k+2 \\ 0 & k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ Rango \ \ de \ \ A' \ \Rightarrow$$

$$\{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} k+1 & 1 & k+2 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k+1)^2 + 1 - (k+1)(k+2) =$$

$$= k^2 + 2k + 1 + 1 - k^2 - 2k - k - 2 = -k = 0 \ \Rightarrow \ \underline{k = 0}$$

$$\{C_1, \ C_3, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} k+1 & 1 & k+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k+1) + 1 - (k+2) = k + 1 + 1 - k - 2 = 0$$

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(k+1)(k+2)+1 = 1-k^2-2k-k-2+1 =$$

$$= -k^2-3k = -k(k+3) = 0\ \ ;;\ \ \underline{k_1 = 0}\ \ ;;\ \ \underline{k_2 = -3}$$

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Compatible\ \ Deter\min ado\ \ \forall k \in R,\ \ k \neq 0,\ \ k \neq -2}}$$

c)

Para que el sistema sea compatible indeterminado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango menor que tres.

Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Compatible\ \ In\det er\min ado\ \ \ para\ \ k = 0}}$$

d)

Para que el sistema sea incompatible es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes. Para k = -2 el rango de A es 2 y el rango de A’ es tres, por lo tanto:

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ Incompatible\ \ para\ \ k = -2}}$$

****

1-B) a) Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$.

b) Calcular la inversa de A para el valor de k = 0.

c) Obtener, de forma justificada, una expresión para el determinante de la matriz de orden n que tiene la misma estructura que A, es decir:

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}$$

----

a)

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera fila:

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=k^4-1^4=\underline{\underline{k^4-1=|A|}}$$

b)

Para k = 0 resulta que $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Procediendo por el método de Gaus-Jordan y rotando todas las filas:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_3 \leftrightarrow F_4 \\ F_4 \leftrightarrow F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la primera fila resultan dos determinantes de las siguientes características:

El primero, que va precedido por el factor k, es un determinante correspondiente a una matriz triangular inferior de dimensión n-1 cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales e iguales a k; su valor es k^{n-1}.

El segundo, que va precedido por el factor $(-1)^{n-1}$, es un determinante triangular superior correspondiente a una matriz cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales e iguales a 1; su valor es $1^{k-1} = 1$.

De lo anterior se deduce que el valor del determinante de la matriz A es:

$$\underline{\underline{|A| = k \cdot k^{n-1} - 1 \cdot (-1)^{n-1} = k^n + (-1)^{n-1}}}$$

****

BLOQUE 2 (Análisis)

2-A) Considerar la función $f(x)=\frac{1+x}{1-|x|}$. Se pide:

a) Dominio y corte con los ejes.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dibujar la gráfica de la función.

----

a)

La expresión $1-|x|$ se puede redefinir de la forma: $1-|x|=\begin{cases}1+x & si \;\; x\le 0\\ 1-x & si \;\; x>0\end{cases}$, con lo cual la función puede expresarse de manera más sencilla de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}1 & si \;\; x\le 0\\ \frac{1+x}{1-x} & si \;\; x>0\end{cases}$$

Para determinar el dominio de la función estudiaremos el punto dudoso que resulta para x = 0.

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x\to 0^-}{lím} f(x)=\underset{x\to 0^-}{lím} 1=\underline{1}=f(0)\\ \underset{x\to 0^+}{lím} f(x)=\underset{x\to 0^+}{lím} \frac{1+x}{1-x}=\underline{1}\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{x\to 0^-}{lím} f(x)=f(0)=\underset{x\to 0^+}{lím} f(x)$$

La función es continua para x = 0.

La función no está definida para el valor x = 1, perteneciente a $(0,\ +\infty)$, porque anula el denominador, por lo cual:

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1\}}}$$

b)

Como es lógico, el estudio de las asíntotas se reduce al intervalo $(0,\ +\infty)$, donde la función es $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1 \Rightarrow \textit{Asíntota horizontal} \Rightarrow \underline{\underline{y=-1}}$$

La asíntota vertical es el valor que anula el denominador: $\underline{x=1}$.

(No estudiamos las tendencias por intuirse en el estudio de los apartados siguientes)

c)

Al igual que en el apartado anterior, nos limitamos al estudio de la función g(x).

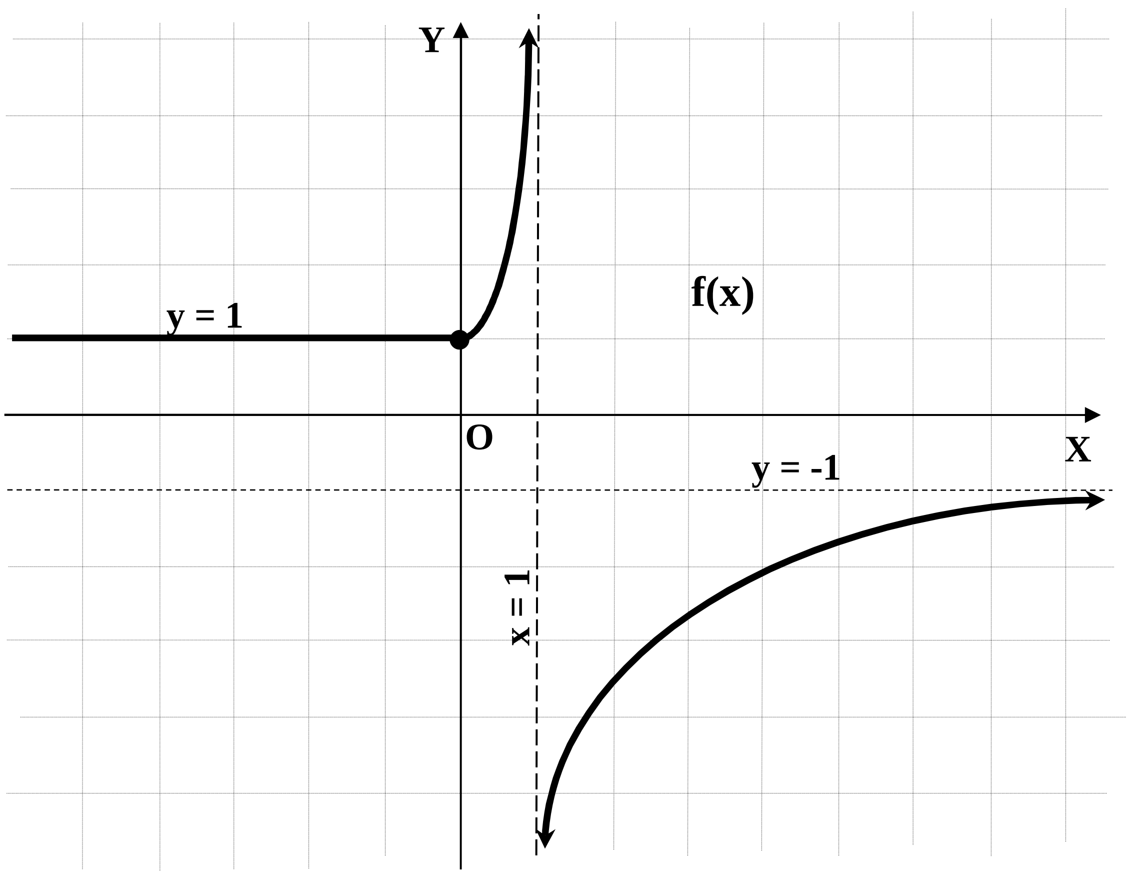
$$g'(x)=\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\underline{\frac{2}{(1-x)^2}=g(x)}$$

Por ser el denominador ≥ 0, $\forall x \in R$, la función g(x) es:

<u>Monótona creciente en su dominio</u>

d)

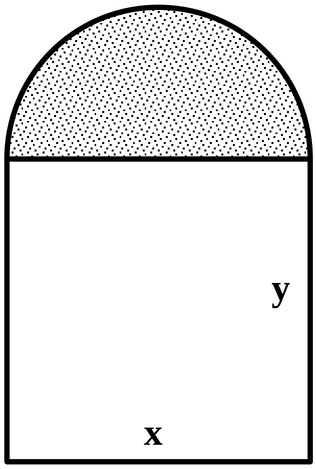
Con los datos anteriores resulta la gráfica que se esboza a continuación.



****

2-B) Una ventana tiene forma de un semicírculo colocado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, pero el semicírculo es de cristal tintado. El cristal tintado transmite la mitad de la luz por unidad de área que el cristal transparente. Así, la función que nos da la cantidad de luz que pasa por la ventana es: $f(x,\ y) = xy + \frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Sabiendo que el perímetro total de la ventana ha de ser de 2 metros, calcular las dimensiones x e y de la ventana que proporcionan el máximo posible de luz.



El perímetro de la ventana es:

$$p = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 2 \ ;; \ y = \frac{2 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} = \underline{\frac{4 - 2x - \pi x}{4} = y}$$

Sustituyendo el valor de y en la función $f(x,\ y)$ resulta:

$$f(x) = x \cdot \frac{4 - 2x - \pi x}{4} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{16x - 8x^2 - 4\pi x^2 + \pi x^2}{16} =$$

$$= \underline{\frac{1}{16} \cdot \left(16x - 8x^2 - 3\pi x^2\right) = f(x)}$$

El máximo posible de luz se produce para el valor de x que anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{16} \cdot (16 - 16x - 6\pi x) = \frac{1}{8} \cdot (8 - 8x - 3\pi x) = 0 \Rightarrow 8 - 8x - 3\pi x = 0 \ ;; \ 8 = (8 + 3\pi)x \ ;;$$

$$\underline{x = \frac{8}{8 + 3\pi} \cong 0'46\ m} \ ;; \ y = \frac{4 - 2x - \pi x}{4} = \frac{4 - 2 \cdot \frac{8}{8 + 3\pi} - \pi \cdot \frac{8}{8 + 3\pi}}{4} = \frac{\frac{32 + 12\pi - 16 - 8\pi}{8 + 3\pi}}{4} =$$

$$= \frac{16 + 4\pi}{4(8 + 3\pi)} = \underline{\frac{4 + \pi}{8 + 3\pi} \cong 0'41\ m = y}$$

$$\underline{\underline{\textit{El máximo de luz se produce para } x \cong 0'46\ m \textit{ e } y = 0'41\ m}}$$

Justificación de máximo: $f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (-8 - 3\pi) = -\frac{8 + 3\pi}{18} < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$

****

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) a) Hallar la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por P(1, 2, 3) y tiene por vector director $\overrightarrow{v} = (6,\ 5,\ 4)$.

b) Calcular la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta r y pasa por el punto A(1, 1, 2).

c) Calcular el área del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 donde estos puntos son los cortes del plano π con los ejes X, Y y Z, respectivamente.

----

a)

La expresión vectorial de r es: $r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3) + \lambda(6,\ 5,\ 4)$.

En forma continua la expresión de r es. $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$.

De la expresión anterior se deduce que: $\begin{cases} 5x-5 = 6y-12 \\ 4x-4 = 6z-18 \end{cases}$, lo cual permite expresar la recta r por unas ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 5x-6y+7=0 \\ 2x-3z+7=0 \end{cases}$$

b)

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 2,\ 3) - (1,\ 1,\ 2) = (0,\ 1,\ 1)$$

El plano π puede determinarse por el punto A y los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 4(x-1)+6(y-1)-6(z-2)-5(x-1)=0 \ ;;$$

$$-(x-1)+6(y-1)-6(z-2)=0 \ ;;\ -x+1+6y-6-6z+12=0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x-6y+6z-7=0}}$$

c)

Los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados son:

$$X \Rightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \to P_1(7,\ 0,\ 0) \ ;;\ Y \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \to P_2\left(0,\ -\frac{7}{6},\ 0\right) \ ;;$$

$$Z \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \to P_3\left(0,\ 0,\ \frac{7}{6}\right)$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(0,\ -\frac{7}{6},\ 0\right) - (7,\ 0,\ 0) = \left(-7,\ -\frac{7}{6},\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = \left(0,\ 0,\ \frac{7}{6}\right) - (7,\ 0,\ 0) = \left(-7,\ 0,\ \frac{7}{6}\right)$$

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores y el área del paralelogramo, a su vez, es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, por lo cual:

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -7 & -\frac{7}{6} & 0 \\ -7 & 0 & \frac{7}{6} \end{matrix} \right\| = \frac{49}{72} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -6 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{49}{72} \cdot \left| -i - 6k + 6j \right| =$$

$$= \frac{49}{72} \cdot \left| -i + 6j - 6k \right| = \frac{49}{72} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-6)^2} = \frac{49}{72} \cdot \sqrt{73} = \underline{\underline{\frac{49\sqrt{73}}{72}\ u^2 = S_{P_1P_2P_3}}}$$

****

3-B) Sean los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (4,\ 3,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_3} = (-k-1,\ 2k+2,\ 2)$.

a) Calcular la ecuación del plano π que tiene $\overrightarrow{v_1}$ y a $\overrightarrow{v_2}$ como vectores directores y que pasa por el punto O(0, 0, 0).

b) Calcular, si es posible, un valor k tal que $\overrightarrow{v_3}$ sea perpendicular simultáneamente a $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$. Justificar la respuesta.

c) Calcular, si es posible, un valor k tal que exista un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular simultáneamente a los tres vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$. Justificar la respuesta.

----

a)

$$\pi(O;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2x+8y+6z-4z-6x-4y=0 \ ;;\ -4x+4y+2z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-2y-z=0}}$$

b)

Para que un vector sea perpendicular a dos vectores dados, el primer vector tiene que ser linealmente dependiente al producto vectorial de los otros dos vectores.

$$\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i+8j+6k-4k-6i-4j = -4i+4j+2k = (-4,\ 4,\ 2)$$

$$\overrightarrow{v_3} = (-k-1,\ 2k+2,\ 2) \ \Rightarrow \ \frac{-k-1}{-4} = \frac{2k+2}{4} = \frac{2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-k-1}{-4} = 1 \ ;;\ -k-1=-4 \ ;;\ \underline{k=3} \\ \dfrac{2k+2}{4} = 1 \ ;;\ 2k+2=4 \ ;;\ \underline{k=1} \end{cases}$$

Al no coincidir los valores de k:

$$\underline{\underline{\textit{No existe un valor de k para que } \overrightarrow{v_3} \textit{ sea } \perp \textit{ simultáneamente a } \overrightarrow{v_1} \ y \ \overrightarrow{v_3}}}$$

c)

Si no es posible que el vector $\overrightarrow{v_3}$ sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ indica, necesariamente, que $\overrightarrow{v_3}$ es linealmente dependiente de los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$, es decir: que están los tres en el mismo plano.

Lo anterior supone que el vector $\overrightarrow{w}$ será perpendicular a los tres vectores dados, cuando lo sea a dos de ellos, por lo tanto el vector $\overrightarrow{w}$ puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$. Por ejemplo:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w} = (-2,\ 2,\ 1)}}$$

El valor de k es fácil determinarlo teniendo en cuenta que los tres vectores dados son coplanarios, lo que significa que el rango que determinas es dos:

$$\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ 2),\ \overrightarrow{v_2} = (4,\ 3,\ 2)\ y\ \overrightarrow{v_3} = (-k-1,\ 2k+2,\ 2) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -k-1 & 2k+2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$12 + 8(2k+2) + 2(-k-1) - 6(-k-1) - 4(2k+2) - 8 = 0 \ ;;\ 4 + 4(2k+2) - 4(-k-1) = 0 \ ;;$$

$$1 + (2k+2) - (-k-1) = 0 \ ;;\ 1 + 2k + 2 + k + 1 = 0 \ ;;\ 3k = -4 \ ;;\ \underline{\underline{k = -\frac{4}{3}}}$$

****