PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2005

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo, en cada caso, una sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) a) Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$, calculando previamente el dominio, los extremos y las asíntotas.

b) Halla el área delimitada por las funciones $g(x)=x+2$ y $h(x)=4-x^2$.

c) Da otra expresión p(x) tal que el área comprendida entre la gráfica de $y=p(x)$ y el eje X, entre los valores x = -1 y x = 1 coincida con el área que has calculado en el apartado anterior. Justifica la respuesta.

----

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio de definición es el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$D(f) \Rightarrow R-\{2,\ -2\}$$

Las asíntotas verticales de la función son los valores que anulan el denominador, o sea:

Asíntotas verticales: x = 2 y x = -2.

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando el valor de x tiene a más o menos infinito: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0$, lo cual significa que el eje de abscisas es una asíntota horizontal.

Para determinar los extremos relativos recurrimos a las derivadas:

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \;\;;;\;\; f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = 0}$$

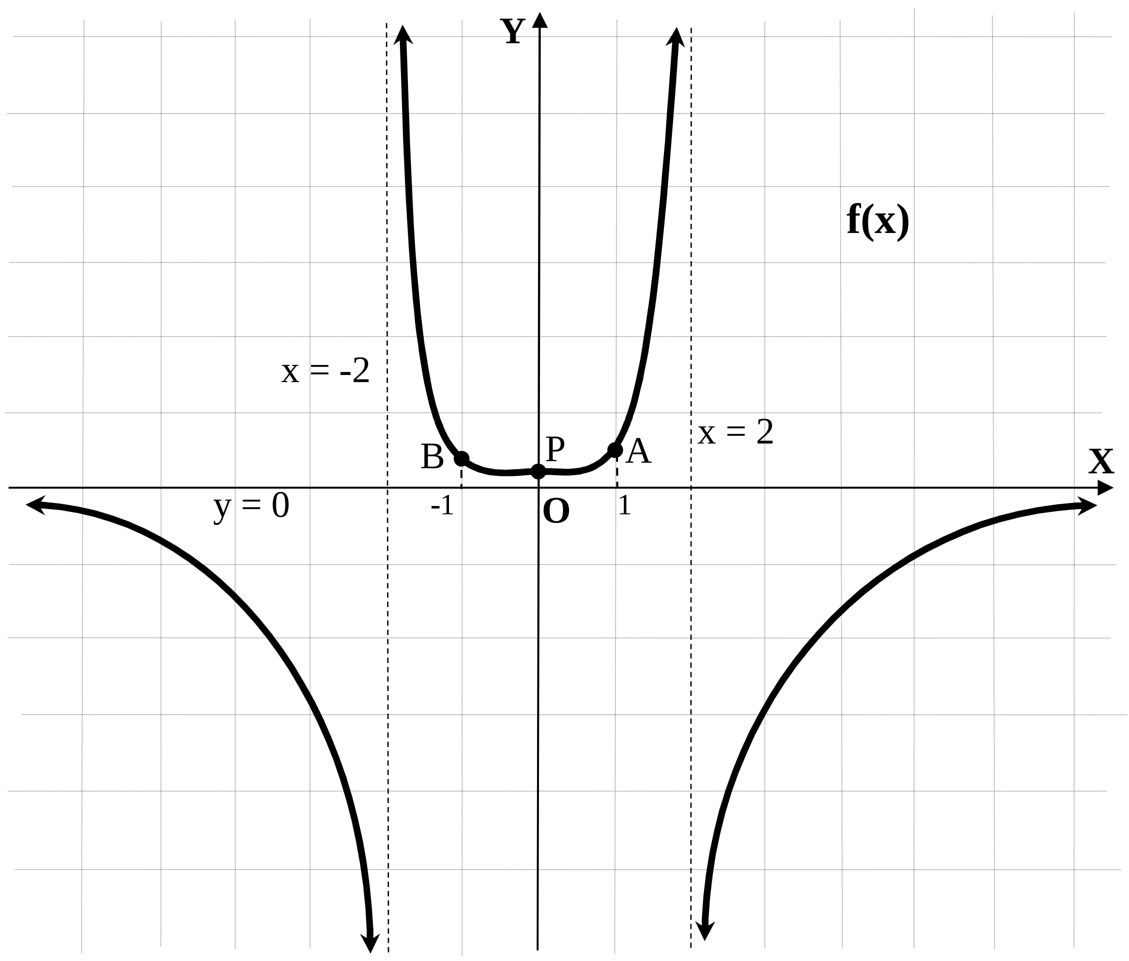
$$f''(x) = \frac{2 \cdot (4-x^2)^2 - 2x \cdot 2(4-x^2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^4} = \frac{2 \cdot (4-x^2) + 8x^2}{(4-x^2)^3} = \frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3} = \frac{2(3x^2+4)}{(4-x^2)^3}$$

$$f''(0) = \frac{2(0+4)}{(4-0)^3} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x = 0} \;\;;;\;\; f(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mín.} \Rightarrow P\left(0,\ \frac{1}{4}\right)}}$$

Con objeto de facilitar la representación gráfica determinamos los intervalos de concavidad y convexidad, para lo cual se estudia el signo de $f''(x)$; teniendo en cuenta que el numerador es positivo $\forall x \in R$, estudiaremos solamente el denominador.

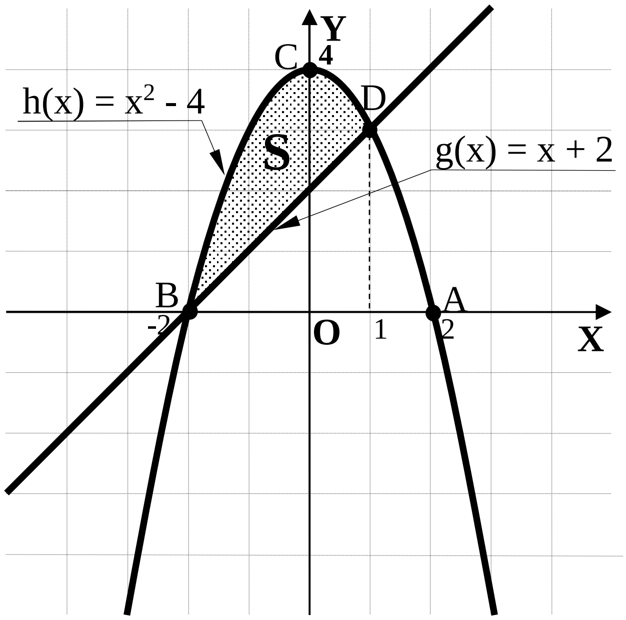
$$f''(x) > 0 \Rightarrow (4-x^2)^3 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Convexidad } (\cup) \Rightarrow (-2,\ 2)}}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow (4-x^2)^3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Concavidad } (\cap) \Rightarrow (-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)}}$$



Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas, podemos representar gráficamente la función, que es la que se expresa en el gráfico anterior.

b)



Los puntos de corte de la parábola con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ \ X \rightarrow y=0\ \ ;;\ \ 4-x^2=0\ \ ;;\ \ x^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -2 \Rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

$$Eje\ \ Y \rightarrow x=0\ \ ;;\ \ y=-4 \Rightarrow \underline{C(0,\ -4)}$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x+2 \\ h(x)=4-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ x+2=4-x^2\ \ ;;\ \ x^2+x-2=0\ \ ;;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ x_1=1\ \ \rightarrow\ \ \underline{D(1,\ 3)}\ \ ;;\ \ x_2=-2\ \ \rightarrow\ \ \underline{B(-2,\ 0)}$$

La representación gráfica de la situación se puede observar en el gráfico.

Teniendo en cuenta que las ordenadas de la parábola son mayores o iguales que las de la recta en el entorno de la superficie a calcular, el área es:

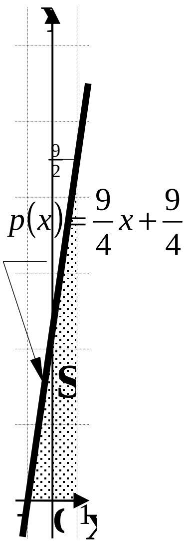
$$S=\int_{-2}^{1}\left[\left(4-x^2\right)-\left(x+2\right)\right]\cdot dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-$$

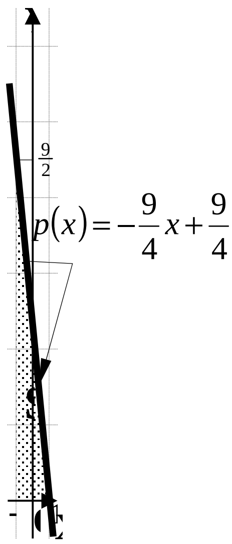
$$-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right]=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4=8-3-\frac{1}{2}=$$

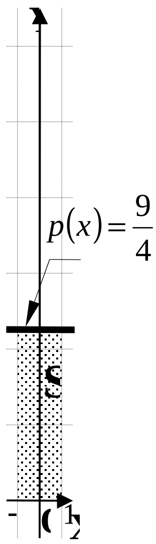
$$=5-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{9}{2}\ u^2=S}}$$

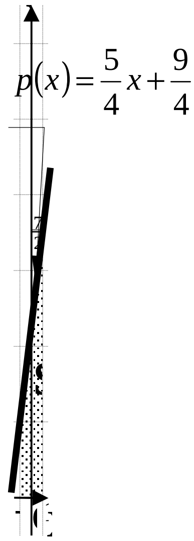
c)

Existen infinitas funciones de la forma $y=p(x)$ tal que el área comprendida entre su gráfica y el eje X en el intervalo (-1, 1) coincide con el valor del área determinada en el apartado anterior $S = \frac{9}{2}\,u^2$, siendo algunos ejemplos los siguientes:









En los cuatro ejemplos anteriores el área es la pedida: $S = \frac{9}{2}\,u^2$. En los dos primeros ejemplos se trata de un triángulo de 2 unidades de base y $\frac{9}{2}$ unidades de altura, con lo cual el área resulta: $S = \frac{2 \cdot \frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$; en el tercer caso se trata de un rectángulo de 2 unidades de base y $\frac{9}{4}$ unidades de altura, con lo cual el área es $S = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}\,u^2$ y, por último el cuarto caso en un trapecio rectángulo de bases 1 y $\frac{7}{2}$ unidades y 2 unidades de altura, con lo cual su área es $S = \frac{1 + \frac{7}{2}}{2} \cdot 2 = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$.

****

1-B) a) Considera la función $f(x)=x\,g(x)$, sabiendo que la función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en x = 1 y que $f(1)\cdot g(1)=4$. ¿Tiene la función f un máximo en x = 1? Justifica la respuesta.

b) Si, además, sabemos que $g(x)=ax^2+bx+c$, calcula valores de a, b y c para que f tenga un mínimo en x = 0.

c) Para dichos valores de a, b y c realiza un esquema gráfico de la función f(x).

----

a) Considera la función $f(x)=x\,g(x)$, sabiendo que la función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en x = 1 y que $f(1)\cdot g(1)=4$. ¿Tiene la función f un máximo en $x=1$? Justifica la respuesta.

Siendo $f(x)=x\,g(x)$, la función f(x) es continua y derivable teniendo en cuenta que el producto de dos funciones continuas y derivables es otra función continua y derivable.

Considerando que $f(x)=x\,g(x)$, para x = 1 es $f(1)=1\cdot g(1) \Rightarrow f(1)=g(1)$; sustituyendo en la expresión $f(1)\cdot g(1)=4$ resulta: $g(1)\cdot g(1)=4 \Rightarrow g(1)=2\ o\ -2$.

$f'(x)=1\cdot g(x)+x\cdot g'(x)=g(x)+x\,g'(x)=$

b) Si, además, sabemos que $g(x)=ax^2+bx+c$, calcula valores de a, b y c para que f tenga un mínimo en x = 0.

c) Para dichos valores de a, b y c realiza un esquema gráfico de la función f(x).

BLOQUE 2

2-A) Responde si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica las respuestas.

a) Se cumple que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, siendo A y B dos matrices cuadradas cualesquiera.

b) Si A es una matriz cuadrada se cumple que $A^2 = O$, entonces tiene que ser A = (O).

c) Se cumple que $(A+I)(A-I) = A^2 - I$, siendo A una matriz cuadrada cualquiera.

Nota: (O) representa la matriz nula d la misma dimensión que A. Análogamente I representa la matriz identidad.

2-B) a) Calcula el carácter del sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} mx + 2y = m \\ 3x - y = m \\ x - y + z = 4 \end{cases}$, en función del parámetro m.

b) Resuélvelo para el valor m = 0.

c) Sustituye la tercera ecuación de S por otra ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado para cualquier valor de m.

BLOQUE 3

3-A) a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los siguientes puntos: A(1, 2, 2) y B(2, 2, 3).

b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y C(2, 2, 4).

c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y D(1, 2, 4)? Justifica tu respuesta.

d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.

3-B) a) Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{2}$, calcula el ángulo que forman.

b) Calcula la recta r_3 perpendicular a las rectas r_1 y r_2 y exprésala en forma paramétrica.

c) ¿Cuál es la ecuación general del plano π que contiene a r_1 y r_2?

d) Calcula la ecuación general del plano π' que esté a distancia $\sqrt{17}$ del plano π.

****