PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2005

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo, en cada caso, una sola de las opciones (A o B). Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) a) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2ax^2-x+4 & si \quad x\le 1 \\ ax+2 & si \quad x>1 \end{cases}$. Calcula un valor de α para que f sea continua en todo R.

b) Para el valor de α calculado, haz un esquema gráfico de la función f. Calcula y señala en gráfico los extremos de f y los puntos de corte con los ejes.

c) Para el valor de α calculado, calcula el área de la región delimitada por f en el primer cuadrante.

d) Para el valor de α calculado, ¿se cumple que la recta $y=ax+2$ es tangente a la función $g(x)=2ax^2-x+4$ en el punto x = 1? Justifica tu respuesta.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 1, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

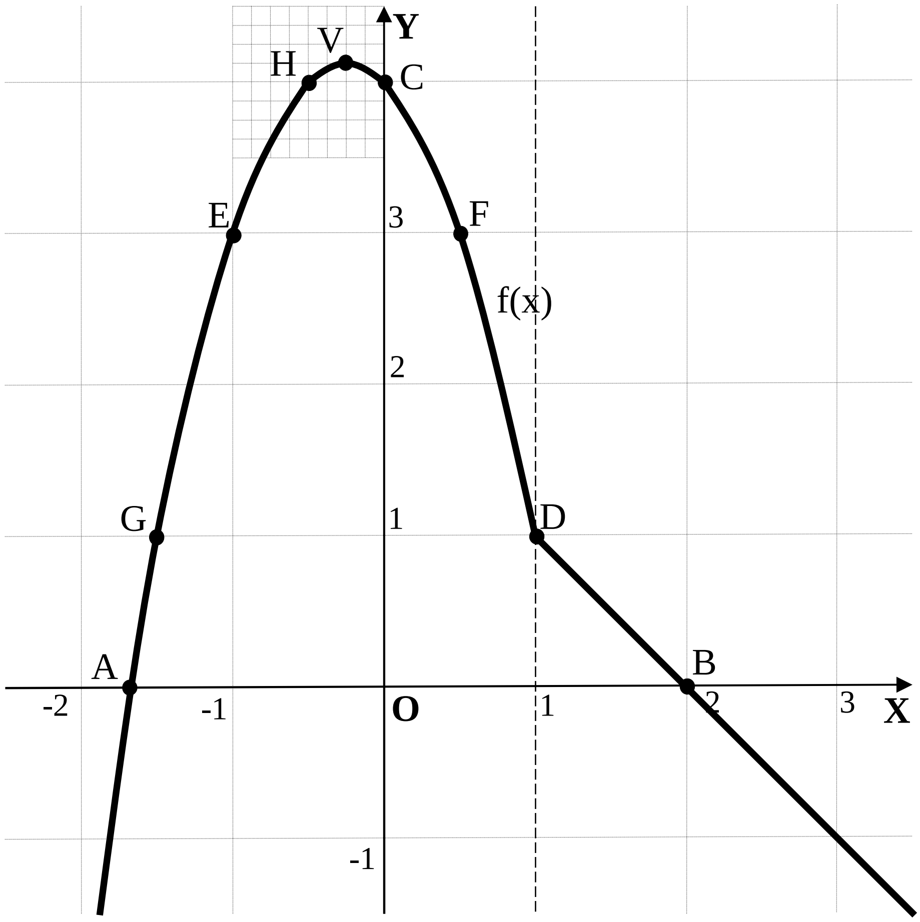
$$Para \;\; x=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(2ax^2-x+4\right)=f(1)=2a-1+4=\underline{2a+3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(ax+2\right)=\underline{a+2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\; 2a+3=a+2 \;\Rightarrow\; \underline{a=-1}$

La función f(x) es continua en toda la recta real para α = -1.

b)

La función resulta $f(x)=\begin{cases} -2x^2-x+4 & si\ \ x\le 1 \\ -x+2 & si\ \ x>1 \end{cases}$, cuya representación gráfica se expresa en el gráfico siguiente.



Considerando la función $g(x)=-2x^2-x+4$, y teniendo en cuenta que su dominio es para x ≤ 1 sus puntos de corte con el eje de abscisas son:

$$g(x)=0\ \Rightarrow -2x^2-x+4=0\ ;;\ 2x^2+x-4=0\ ;;\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}\Rightarrow\begin{cases} x\cong -1'69 \\ x_2\cong 1'19 \end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ x_2\notin D(g)\ \Rightarrow\ \underline{A(-1'69,\ 0)}$. Su punto de corte con el eje de ordenadas en C(0, 4).

El punto máximo de g(x) es el siguiente:

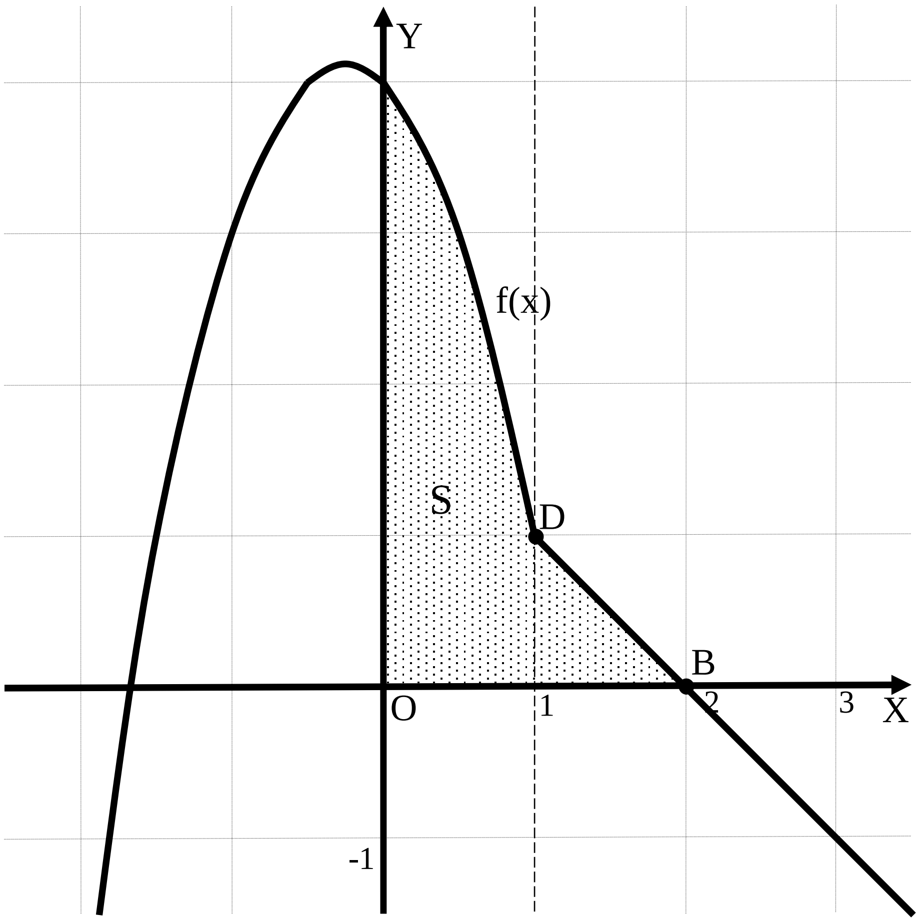
$$g'(x)=-4x-1=0\ ;;\ 4x=-1\ ;;\ x=-\frac{1}{4}.\ \ g\left(-\tfrac{1}{4}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}\right)+4=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+4=$$

$$=\frac{-1+2+32}{8}=\frac{33}{8}\ \Rightarrow\ \underline{V\left(-\frac{1}{4},\ \frac{33}{8}\right)}.$$

La punto E(-1, 3) se obtiene para g(-1) y el punto $F\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ se obtiene por simetría con respecto a la vertical del vértice V; del mismo modo se obtiene el punto D(1, 0) y su simétrico $G\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$.

Considerando la función $h(x) = -x+2$, y teniendo en cuenta que su dominio es para x > 1 su punto de corte con el eje de abscisas es B(2, 0).

c)



De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(-2x^2 - x + 4\right) \cdot dx + \int_1^2 (-x+2) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 4\right) - 0 + \left(-\frac{2^2}{3} + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{4}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 2 = 6 - \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{36 - 10 - 3}{6} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{23}{6} u^2}} = S .$$

d)

La derivada de una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto y, teniendo en cuenta que el punto D(1, 1) pertenece a la función $g(x) = -2x^2 - x + 4$ considerada anteriormente:

$$g'(x) = -4x - 1 \Rightarrow m = g'(1) = -4 - 1 = \underline{-5}.$$

Sabiendo que la pendiente de la recta es -1, es evidente que:

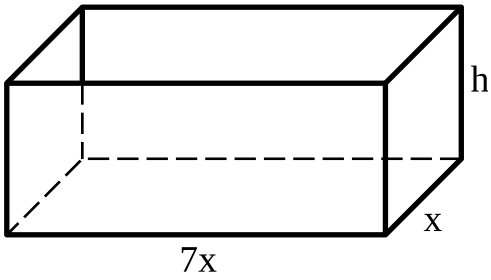
<u>La recta y = -x + 2 no es tangente en x = 1 de la función g(x) = -2x^2 – x + 4.</u>

A la misma conclusión se llega considerando la derivabilidad de la función dada $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - x + 4 & si \;\; x \le 1 \\ -x + 2 & si \;\; x > 1 \end{cases}$:

$f'(x) = \begin{cases} -4x - 1 & si \;\; x \le 1 \\ -1 & si \;\; x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} -5 & si \;\; x \le 1 \\ -1 & si \;\; x > 1 \end{cases} \Rightarrow$ La función no es derivable en el punto de abscisa x = 1, lo que justifica la respuesta dada.

****

1-B) a) Considera una caja de cartón de base rectangular y sin tapa superior. La longitud de uno de los lados del rectángulo de la base es siete veces la del otro. Calcula las dimensiones que ha de tener esta caja para que su volumen sea de 49 cm^3 y para que su fabricación sea lo más económica posible.



b) Si el metro cuadrado de cartón se vende a 2’5 euros, ¿cuánto cuesta cada caja?

----

a)

Para que la fabricación de la caja sea lo más económica posible es necesario que su superficie sea mínima.

$$S = 7x \cdot x + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot 7x \cdot h = 7x^2 + 2xh + 14xh = \underline{7x^2 + 16xh}.$$

Para expresar la superficie en función de una sola incógnita tenemos en cuenta que conocemos el volumen:

$$V = 7x \cdot x \cdot h = 7x^2 \cdot h = 49 \;\;;;\;\; x^2 \cdot h = 49 \Rightarrow \underline{h = \frac{7}{x^2}}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de h en la expresión de S, resulta:

$$S = 7x^2 + 16x \cdot \frac{7}{x^2} = \underline{7x^2 + \frac{112}{x}}.$$

Para que la superficie sea mínima tiene que ser cero su derivada:

$$S' = 14x - \frac{112}{x^2} = 0 \Rightarrow 14x = \frac{112}{x^2} \;\;;;\;\; x^3 = \frac{112}{14} = \frac{56}{7} = 8 \;\;;;\;\; x = \sqrt[3]{8} = \underline{2\ cm}.$$

$$h = \frac{7}{x^2} = \frac{7}{2^2} = \frac{7}{4} = \underline{1'75\ cm}.$$

<u>La caja debe tener una base de 2 x 14 cm y la altura 1’75 cm.</u>

Para justificar que se trata de un mínimo tenemos que demostrar que la segunda derivada es positiva para el valor de x = 2:

$$S'' = 14 - 112 \cdot \frac{-2x}{x^4} = 14 + \frac{224}{x^3} \Rightarrow \underline{S''(2) > 0,\ \ c.q.j.}$$

b)

Para hallar el coste de una caja debemos expresar la superficie en metros cuadrados, teniendo en cuenta que para pasar de cm^2 a m^2 hay que dividir por 10.000.

$$S = \left(7 \cdot 2^2 + \frac{112}{2} \right) \ cm^2 = (28 + 56) \ cm^2 = 86 \ cm^2 = \underline{0'0086 \ m^2} \ .$$

$$Coste = S \ \cdot 2'5 = 0'0086 \cdot 2'5 = \underline{0'0215} \ .$$

<u>El coste de una caja es de 2’15 céntimos de euro.</u>

****

BLOQUE 2

2-A) a) Halla el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 2-t & 1-t \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro t.

b) El sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado. Calcula sus soluciones.

c) Modifica algún dato en el sistema anterior de forma que resulte compatible determinado. Justifica tu respuesta.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 2-t & 1-t \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Rotando \ \ filas\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 2-t & 1-t \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 2-3t & -1-t \\ 0 & 2-3t & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \underline{M=\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 2-3t & -1-t \\ 0 & 0 & -1+t \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} t \neq 1 \\ t \neq \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ \ M=3}} \qquad \underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ \ M=2}}$$

Utilizando determinantes:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 2-t & 1-t \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 4+3t(1-t)+(2-t)-2(1-t)-2t-3(2-t)=$$

$$=4+3t-3t^2+2-t-2+2t-2t-6+3t=-3t^2+5t-2=0 \ ;; \ 3t^2-5t+2=0 \ ;; \ t=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm 1}{6} \Rightarrow \underline{t_1=1} \ ;; \ \underline{t_2=\frac{2}{3}}.$$

Como se esperaba, llegamos al mismo resultado.

b)

El sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$.

Despreciando una de las ecuaciones (segunda) y haciendo z = λ:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x+y=-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ -x-y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=1+\lambda} \ ;; \ y=-\lambda-x=-\lambda-1-\lambda \ ;; \ \underline{y=-1-2\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

c)

<u>Las modificaciones tienen que ser alterando la matriz de coeficientes para que su determinante sea distinto de cero</u>. Su rango, así como el rango de la matriz ampliada, sería tres y, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado, como se nos pide.

Ejemplo 1: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+3+1-2-2-3=8-7=1\neq 0.$

Ejemplo 2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-3=-5\neq 0.$

****

2-B) a) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & 0\end{pmatrix}$. ¿Qué condiciones han de cumplir x, y, z para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que A · B = B · A?

b) Si B es una de las matrices que conmutan con A, ¿en qué condiciones es B inversible? Calcula la expresión de la inversa, B^{-1}, en función de los parámetros que necesites.

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+0\\ 3x+4z & 3y+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y\\ 3x+4z & 3y\end{pmatrix} \\ \\ B\cdot A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z+0 & 2z+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z & 2z\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2z & y\\ 3x+4z & 3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z & 2z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=x+3y\\ 3x+4z=z\\ y=2x+4y\\ 3y=2z\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3y=2z\\ x=-z\\ 2x=-3y\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{\underline{\left\{\begin{array}{l}z=-x\\ y=-\frac{2}{3}x\end{array}\right\}}}.$$

$$\underline{\underline{Las\ \ matrices\ \ B\ \ son\ \ de\ \ la\ \ forma\ \ B=\begin{pmatrix}x & -\frac{2}{3}x\\ -x & 0\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \forall x\in R}}$$

b)

$$\underline{\underline{B\ \ es\ \ inversible\ \ \forall x\in R-\{0\}}}$$

Para hallar la inversa de B tenemos en cuenta lo siguiente:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}x & -\frac{2}{3}x\\ -x & 0\end{pmatrix}^{-1}=\left[x\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]^{-1}=\underline{\frac{1}{x}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}}.$$

Par hallar $\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$ se procede por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to -\tfrac{3}{2}F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+\tfrac{2}{3}F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\underline{\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\underline{B^{-1}=\frac{1}{x}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix},\ \forall x\in R-\{0\}}}$$

****

BLOQUE 3

3-A) a) ¿Cuál es la posición relativa de las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

b) ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta r_1 y que además contenga a la recta r_2? Justifica tu respuesta.

c) Calcula la ecuación general del plano π que contenga a las rectas r_1 y r_2.

d) Calcula la ecuación paramétrica de una recta r_3 perpendicular al plano π y tal que la distancia (r_1, r_3) sea igual que la distancia (r_2, r_3) e igual a $\sqrt{105}$ unidades.

----

a)

Vamos a realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r_1 y r_2 es $\begin{cases} x=0 \\ y-2z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$, que es homogéneo, por lo cual es compatible. Para saber si es compatible determinado (x = y = z = 0) o compatible indeterminado.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es tres por lo siguiente:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3 \neq 0$.

El sistema es compatible determinado y la solución es x = y = z = 0.

Las rectas r_1 y r_2 son secantes y se cortan en el origen de coordenadas.

b)

Para saber si es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta r_1 y que además contenga a la recta r_2, en primer lugar expresamos ambas rectas por ecuaciones paramétricas: $r_1 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

El plano pedido β, si existe, por ser perpendicular a r_1 tiene la siguiente ecuación general: $\pi \equiv 2y+z+D=0$.

Si tiene que contener a r_2 debe contener a todos sus puntos, que tiene por expresión general $P(t,\ -2t,\ t)$.

$$\left.\begin{array}{l}\beta \equiv 2y+z+D=0 \\ P(t,\ -2t,\ t)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(-2t)+t+D=0\ ;;\ -4t+t+D=0\ ;;\ \underline{D=3t}.$$

Como el valor de D depende del valor de t, el plano π no puede contener a r_2.

Esta parte del ejercicio podía haberse resuelto de una forma más simple: si el plano β contiene a r_2, contiene a dos de sus puntos, por ejemplo: O(0, 0, 0) y A(1, -2, 1), para los cuales tendría que satisfacerse su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\beta \equiv 2y+z+D=0 \\ O(0,\ 0,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 0+0+D=0\ ;;\ \underline{D_1=0} \\ \left.\begin{array}{l}\pi \equiv 2y+z+D=0 \\ A(1,\ -2,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot(-2)+1+D=0\ ;;\ -4+1+D=0\ ;;\ \underline{D_2=3}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D_1 \neq D_2}.$$

<u>No es posible encontrar un plano perpendicular a r_1 que contenga a r_2.</u>

c)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1}=(0,\ 2,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(1,\ -2,\ 1)$.

La expresión general del plano π que contiene a r_1 y r_2 es la siguiente:

$$\pi(O;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2x+y-2z+2x=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x+y-2z=0}}$$

d)

La recta r_3 pedida (son posible cuatro rectas, que aunque no se pidan, también las vamos a determinar) es perpendicular al plano π y su intersección con este plano está situada en la bisectriz de las rectas r_1 y r_2.

Para determinar las dos bisectrices b_1 y b_2 tenemos en cuenta que sus vectores directores son la suma y la diferencia de los versores de los vectores directores de las rectas (un versor de un vector dado es el que tiene su misma dirección y sentido y por módulo tiene la unidad).

Los versores de los vectores directores son $\overrightarrow{v'_1}=\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $\overrightarrow{v'_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Los vectores directores de las bisectrices son vectores linealmente dependientes de los siguientes:

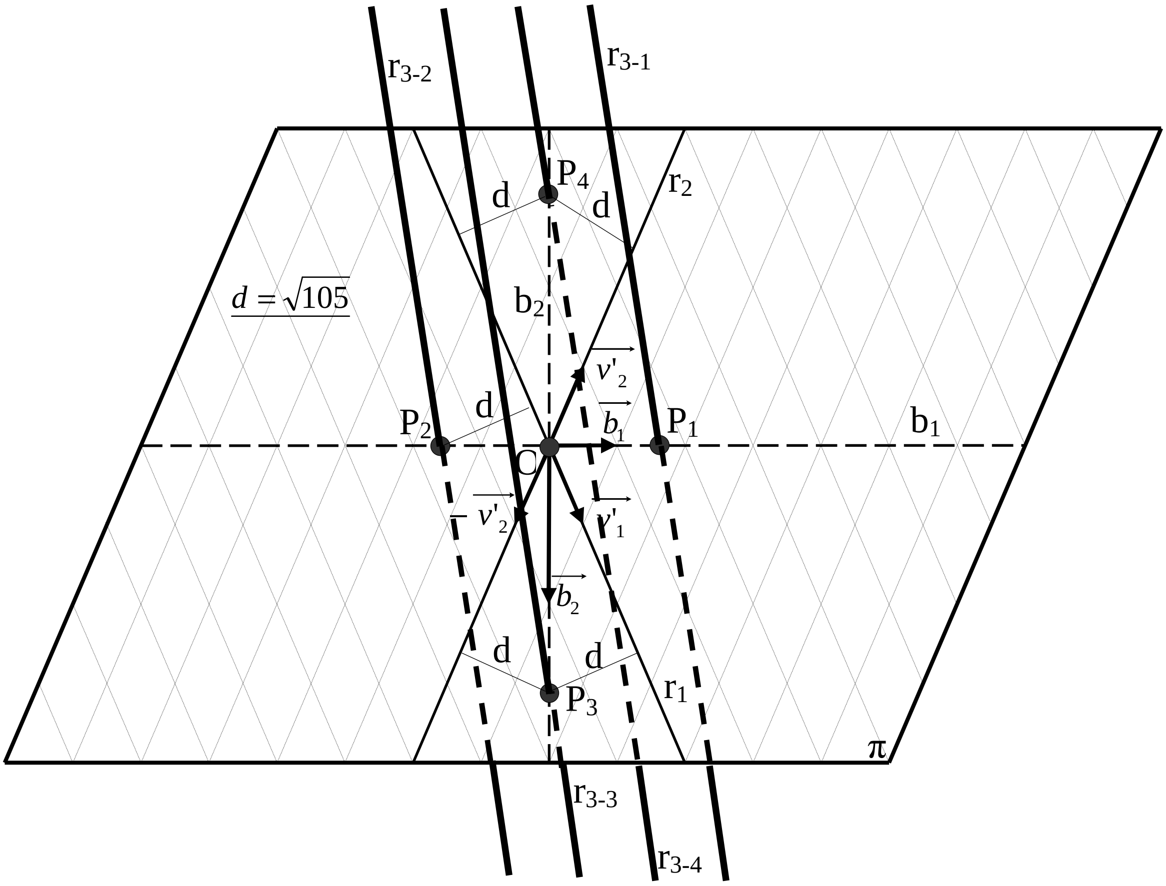
$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{v'_1} + \overrightarrow{v'_2} = \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}},\ \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{5}}{\sqrt{30}},\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right).$$

$$\overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v'_2} = \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{-2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{30}},\ \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{5}}{\sqrt{30}},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right).$$

Vectores directores de las bisectrices:

$\overrightarrow{b'_1} = \left[\sqrt{5},\ 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right),\ \sqrt{6}+\sqrt{5}\right]$ y $\overrightarrow{b'_2} = \left[-\sqrt{5},\ 2\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right),\ \sqrt{6}-\sqrt{5}\right]$.

Para ilustrar el proceso se hace el gráfico que se acompaña.



Las ecuaciones de las bisectrices son, teniendo en cuenta que pasan por el origen de coordenadas, las siguientes: $b_1 \equiv \begin{cases} x = \sqrt{5}\lambda \\ y = 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\lambda \\ z = \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\lambda \end{cases}$ y $b_2 \equiv \begin{cases} x = -\sqrt{5}\lambda \\ y = 2\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\lambda \\ z = \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\lambda \end{cases}$.

Los puntos de b_1 son de la forma $P\left[\sqrt{5}\lambda,\ 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\lambda,\ \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\lambda\right]$.

Tiene que ser: $d(P,\ r_1) = d(P,\ r_2) = \sqrt{105}$.

La distancia del origen de coordenadas a una recta r es $d(O,\, r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

Aplicando la fórmula al punto $P\left[\sqrt{5}\lambda,\ 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\lambda,\ \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\lambda\right]$ y a las rectas r_1 y r_2:

$$d(O,\, r_1)=\frac{\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}=\sqrt{105}\ \ ;;\ \ \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5}\lambda & 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\lambda & \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\lambda \end{matrix}\right\|}{\left|2j+k\right|}=\sqrt{105}\ \ ;;$$

$$\frac{\lambda\cdot\left|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right) & \sqrt{6}+\sqrt{5} \end{matrix}\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{105}\ \ ;;\ \ \frac{\lambda\cdot\left|2\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)i+\sqrt{5}j-2\sqrt{5}k-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)i\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{105}\ \ ;;$$

$$\frac{\lambda\cdot\left|4\sqrt{5}i+\sqrt{5}j-2\sqrt{5}k\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{105}\ \ ;;\ \ \lambda\cdot\left|4i+j-2k\right|=\sqrt{105}\ \ ;;\ \ \lambda\cdot\sqrt{16+1+4}=\sqrt{105}\ \ ;;$$

$$\lambda\cdot\sqrt{21}=\sqrt{5\cdot 21}\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=\sqrt{5}}.$$

El punto P_1 resulta ser $P_1\left[\sqrt{5}\cdot\sqrt{5},\ 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5},\ \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}\right]$ o mejor, haciendo operaciones: $P_1\left[5,\ 2\left(\sqrt{30}-5\right),\ \sqrt{30}+5\right]$ o también $\underline{P_1\left(5,\ 2\sqrt{30}-10,\ \sqrt{30}+5\right)}$.

Las rectas r_3 tienen como vector director al vector normal del plano π hallado anteriormente: $\overrightarrow{v_3}=(4,\ 1,\ -2)$.

La recta $r_{3\text{-}1}$ tiene la siguiente expresión paramétrica: $\underline{\underline{r_{3-1}\equiv\begin{cases} x=5+4\lambda \\ y=2\left(\sqrt{30}-5\right)+\lambda \\ z=\sqrt{30}+5-2\lambda \end{cases}}}$.

El punto P_2 es $\underline{P_2\left(-5,\ 10-2\sqrt{30},\ -\sqrt{30}-5\right)}$, por simetría con respecto al origen.

La recta $r_{3\text{-}2}$ tiene la siguiente expresión paramétrica: $\underline{\underline{r_{3-1}\equiv\begin{cases} x=-5+4\lambda \\ y=2\left(5-\sqrt{30}\right)+\lambda \\ z=-\sqrt{30}-5-2\lambda \end{cases}}}$.

Por un procedimiento similar se hallan los puntos P_3 y P_4 y también las rectas $r_{3\text{-}3}$ y $r_{3\text{-}4}$.

****

3-B) Dados los puntos A(1, 2, 3), B(0, 2, 0) y C(1, 0, 1):

a) Prueba que no están alineados y escribe la ecuación general del plano π determinado por estos tres puntos.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que es la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice C.

c) Calcula el área del triángulo ABC.

d) Calcula un punto D en el plano π que has calculado en el apartado a) tal que el triángulo ABD cumpla las dos condiciones siguientes:

- ABD es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.
- Área (ABD) = Área (ABC).

----

a)

Los puntos A(1, 2, 3), B(0, 2, 0) y C(1, 0, 1) determinan los vectores:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 2,\ 0)-(1,\ 2,\ 3)=(-1,\ 0,\ -3).$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(1,\ 0,\ 1)-(1,\ 2,\ 3)=(0,\ -2,\ -2).$$

Los vectores $\vec{u}=(-1,\ 0,\ -3)$ y $\vec{v}=(0,\ -2,\ -2)$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes y, en consecuencia:

<u>Los puntos A, B y C no están alineados, como teníamos que probar.</u>

El plano que determinan los puntos A, B y C es:

$$\pi(B;\ \vec{u},\ \vec{v})\equiv\begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2z-6x-2(y-2)=0\ ;;\ z-3x-y+2=0\ .$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv 3x+y-z-2=0}}$$

b)

La recta r que pasa por A y B tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente independiente del vector $\vec{u}=(-1,\ 0,\ -3)$; por ejemplo: $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 0,\ 3)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=2 \\ z=3\lambda \end{cases}$.

El haz de planos β paralelos y perpendiculares a la recta que pasa por A y C tiene por expresión general $\beta \equiv x+3z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano α que contiene al punto C es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\beta \equiv x+3z+D=0\\ C(1,\ 0,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow 1+3\cdot 1+D=0\ ;;\ 4+D=0\ ;;\ D=-4 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x+3z-4=0}.$$

El punto P intersección del plano α y la recta r es la solución del sistema de ecuaciones que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv x+3z-4=0\\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2 \\ z=3\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+3\cdot 3\lambda-4=0\ ;;\ 10\lambda=4\ ;;\ \lambda=\frac{2}{5} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{2}{5},\ 2,\ \frac{6}{5}\right)}.$$

La recta h pedida es la que pasa por los puntos C y P; su vector director es:

$$\overrightarrow{v'_h}=\overrightarrow{PC}=C-P=(1,\ 0,\ 1)-\left(\frac{2}{5},\ 2,\ \frac{6}{5}\right)=\left(\frac{3}{5},\ -2,\ -\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_h}=(3,\ -10,\ -1)}.$$

La expresión de la recta h dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{h \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-10\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}}}$$

c)

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|\,2k-6i-2j\,|=|-3i-j+k\,|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+1^2}=$$

$$=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}.$$

$$\underline{\underline{S_{ABC}=\sqrt{11}\ u^2}}$$

También puede calcularse al área del triángulo como la mitad del producto de la base por la altura:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(0-1)^2+(2-2)^2+(0-3)^2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{2}{5}\right)^2+(0-2)^2+\left(1-\frac{6}{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+0+9}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+4+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}+4+\frac{1}{25}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{10}{25}+4}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{110}{5}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{110}}{5}=\frac{1}{10}\cdot\sqrt{1100}=\underline{\underline{\sqrt{11}\ u^2=S_{ABC}}}.$$

d)

Un punto genérico del plano π es $D(x,\ y,\ 3x+y-2)$.

Tienen que cumplirse las siguientes condiciones: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ y $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}=\sqrt{11}$.

$$\overrightarrow{AD}=D-A=(x,\ y,\ 3x+y-2)-(1,\ 2,\ 3)=(x-1,\ y-2,\ 3x+y-5).$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0\ \Rightarrow\ (-1,\ 0,\ -3)\cdot(x-1,\ y-2,\ 3x+y-5)=-x+1-9x-3y+15=0\ ;;$$

$$-10x-3y+16=0\ ;;\ \underline{10x+3y=16}. \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}=\sqrt{11}\ \Rightarrow\ \sqrt{10}\cdot\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(3x+y-5)^2}=2\cdot\sqrt{11}\ ;;$$

$$10\cdot\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(3x+y-5)^2\right]=4\cdot 11\ ;;$$

$$5\cdot\left(x^2-2x+1+y^2-4y+4+9x^2+y^2+25+6xy-30x-10y\right)=22\ ;;$$

$$5\cdot\left(10x^2+2y^2-32x-14y+6xy+30\right)=22\ ;;\ 25x^2+5y^2-80x-35y+15xy+75=11\ ;;$$

$$25x^2+5y^2-80x-35y+15xy+64=0. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de segundo grado formado por (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l}10x+3y=16\\ 25x^2+5y^2-80x-35y+15xy+64=0\end{array}\right\}\rightarrow x=\frac{16-3y}{10}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 25\cdot\frac{(16-3y)^2}{100}+5y^2-80\cdot\frac{16-3y}{10}-35y+15\cdot\frac{16y-3y^2}{10}+64=0\ ;;$$

$$\frac{256-96y+9y^2}{4}+5y^2-128+24y-35y+\frac{48y-9y^2}{2}+64=0\ ;;$$

$$256-96y+9y^2+20y^2-512-44y+96y-18y^2+256=0\ ;;\ 11y^2-44y=0\ ;;\ y^2-4y=0\ ;;$$

$$y(y-4)=0\ \Rightarrow\ \underline{y_1=0}\ ;;\ \underline{y_2=4}.$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{16-0}{10}=\underline{\frac{8}{5}}\ ;;\ z_1=3x_1+y_1-2=\frac{24}{5}-2=\underline{\frac{14}{5}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D_1=\left(\frac{8}{5},\ 0,\ \frac{14}{5}\right)}}.$$

$$\Rightarrow\ x_2=\frac{16-12}{10}=\frac{4}{10}=\underline{\frac{2}{5}}\ ;;\ z_2=3x_2+y_2-2=\frac{6}{5}+4-2=\frac{6}{5}+2=\underline{\frac{16}{5}}\Rightarrow\ \underline{\underline{D_2\left(\frac{2}{5},\ 4,\ \frac{16}{5}\right)}}.$$

****