**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**

**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

**JUNIO - 2007**

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse uno sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) Un cajero automático contiene 1.330 euros repartidos en billetes de tres tipos distintos: 10, 20 y m euros. En el cajero hay en total 97 billetes y el número de billetes de 10 euros es el doble del número de billetes de 20 euros.

a ) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuántos billetes hay de cada tipo.

b ) Prueba que para $m \in \{5,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500\}$ el sistema es compatible determinado.

c ) Razona si en el cajero puede haber billetes de 100 euros.

----------

a )

Siendo x, y, z el número de billetes de 10, 20 y m euros, respectivamente, sería:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+20y+mz=1330 \\ x+y+z=197 \\ x=2y \end{array}\right\} \text{ o el sistema equivalente: } \underline{\underline{\left.\begin{array}{r} 10x+20y+mz=1330 \\ x+y+z=197 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}}}.$$

b )

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea tres, es decir: el determinante que determinan tiene que ser distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix}10 & 20 & m\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix}10 & 20 & m\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=-2m+20-m+20=40-3m=0 \Rightarrow \underline{m\notin N}$$

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\textit{Para } m\in\{5,\ 50,\ 100,\ 200,\ 500\} \textit{ el sistema es C.D., como debíamos probar}}}$$

c )

Para que en el cajero haya billetes de 100 euros es necesario que las soluciones del sistema que se obtiene sustituyendo m por 100 tenga soluciones en N.

El sistema es $\left.\begin{array}{r}10x+20y+100z=1330\\ x+y+z=197\\ x-2y=0\end{array}\right\}$ o mejor: $\left.\begin{array}{r}x+2y+10z=133\\ x+y+z=197\\ x-2y=0\end{array}\right\}$.

Para resolverlo tenemos en cuenta que x = 2y, con lo cual resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}2y+2y+10z=133\\ 2y+y+z=197\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}4y+10z=133\\ 3y+z=197\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-4y-10z=-133\\ 30y+10z=1970\end{array}\right\} \Rightarrow 26y=1837 \ ;;$$

$$y=\frac{1837}{26}=70'65 \Rightarrow \underline{y\notin N}$$

<u>En el cajero no puede haber billetes de 100 euros.</u>

**********

1-B) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in R$.

a ) Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

b ) Para m = 1 resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $AX = B,\ con\ B=\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c ) Calcula $C - A^{-1} \cdot B$, siendo $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y B definida en el apartado anterior.

Indicación: No se necesita calcular $A^{-1}$.

----------

a )

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 4m + 3 = 0 \ ;; \ m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1 = -1} \\ \\ \underline{m_2 = -3} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A\ \ es\ \ inversible\ \ \forall m \in R,\ \{m \neq -1,\ m \neq -3\}}}$$

b )

Para m = 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema de ecuaciones lineales resultante es $\left. \begin{aligned} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y = 5 \\ -x + z = 2 \end{aligned} \right\}$.

Su resolución más sencilla es la siguiente:

$$x - y + 4z = 11 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y = 5 - 3x \\ z = 2 + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - (5 - 3x) + 4(2 + x) = 11 \ ;;$$

$x-5+3x+8+4x=11$ ;; $8x=8$ ;; $\underline{x=1}$

$$\underline{\underline{Solución:\ x=1\ ;;\ y=2\ ;;\ z=3}}$$

c )

Si en la ecuación $AX=B$ multiplicamos los dos términos por la izquierda por $A^{-1}$ resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ ;;\ I\cdot X=A^{-1}\cdot B\ ;;\ \underline{A^{-1}\cdot B=X=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}$$

$$\underline{\underline{C-A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}}}$$

**********

BLOQUE 2

2-A) Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x \le 0 \\ bx+x^2 & si\ \ x>0 \end{cases}$ con $b \in R$.

a ) Calcula el valor de b para que f sea derivable en x = 0.

b ) Para b = -2 y el intervalo $[-2\pi,\ 3]$, determina los puntos de corte con los ejes, extremos relativos (máximos y mínimos), la curvatura y dibuja la gráfica de la función de f.

c ) Calcula el área comprendida entre la curva $y = sen\ x$ y la recta y = 0 en el intervalo $[-2\pi,\ 0]$.

----------

a )

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} sen\ x = \underline{0} = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (bx + x^2) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b \in R}$$

La función es continua en x = 0 para cualquier valor real de b.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & si\ \ x \le 0 \\ b + 2x & si\ \ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = \underline{1} \\ f'(0^+) = \underline{b} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{b = 1}}$$

<u>La función es derivable en x = 0 para b = 1.</u>

b )

Para b = -2 la función es $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x \le 0 \\ x^2-2x & si\ \ x>0 \end{cases}$.

En el intervalo $[-2\pi,\ 0]$ la función es $f(x) = sen\ x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$sen\ x=0\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=-\pi} \\ \underline{x_3=-2\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0),\ A(-\pi,\ 0)\ y\ B(-2\pi,\ 0)}}.$$

Los posibles extremos relativos son para los valores de x que anulan la primera derivada: $f'(x)=\cos\ x=0\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x_1=-\frac{\pi}{2}} \\ \underline{x_2=-\frac{3\pi}{2}} \end{array}\right.$.

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si los valores de la segunda derivada, para los valores que anulan la primera, son positivos o negativos, se tratará de mínimos o máximos, respectivamente.

$$f''(x)=-sen\ x\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=sen\ \frac{\pi}{2}=1>0\Rightarrow \underline{Mín.\ \ para\ \ x=-\frac{\pi}{2}} \\ f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=sen\ \frac{3\pi}{2}=-1<0\Rightarrow \underline{Máx.\ \ para\ \ x=-\frac{3\pi}{2}} \end{array}\right.$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo\ \Rightarrow\ C\left(-\frac{\pi}{2},\ -1\right)}}$$

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo\ \Rightarrow\ D\left(-\frac{3\pi}{2},\ 1\right)}}$$

La curvatura de la función la determina su segunda derivada: la función es convexa $(\cup)$ en los intervalos donde la segunda derivada es negativa y cóncava $(\cap)$ cuando la segunda derivada es positiva.

En el intervalo considerado $[-2\pi,\ 0]$ la curvatura es la siguiente:

$$f''(x)=-sen\ x\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Convexa\ (\cup)\ \Rightarrow\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)}} \\ f''(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Cóncava\ (\cap)\ \Rightarrow\ x\in\left(-2\pi,\ -\frac{3\pi}{2}\right)}} \end{array}\right.$$

En el intervalo $(0,\ 3]$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$x^2 - 2x = 0\ ;;\ x(x-2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{x_1 = 0} \\ \\ \underline{x_2 = 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)\ y\ E(2,\ 0)}}.$$

Los posibles extremos relativos son para los valores de x que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}.$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

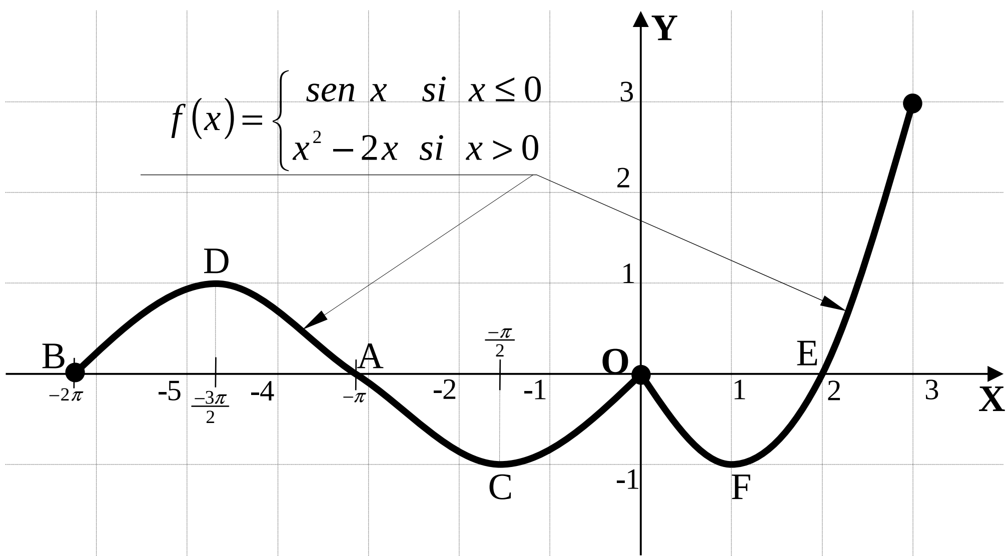
$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x = 1}$$

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \Rightarrow F(1,\ -1)}}$$

En el intervalo considerado $(0,\ 3]$ la curvatura es la siguiente:

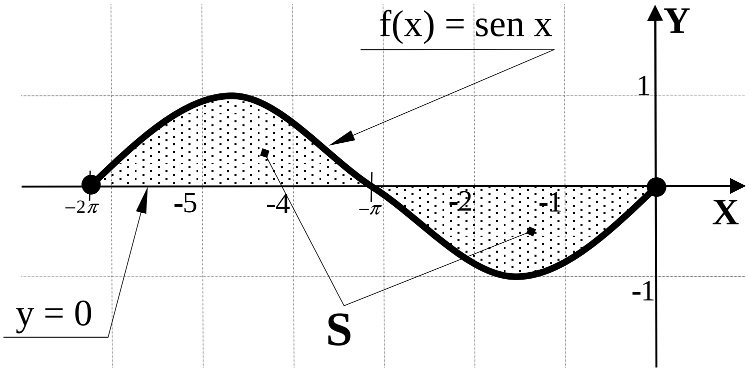
$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexa\ (\cup) \Rightarrow x \in (0,\ 3)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:




c )

Teniendo en cuenta que la recta y = 0 es el eje de abscisas y que en el intervalo $(-\pi,\ 0)$ las ordenadas de la superficie son negativas, la superficie pedida, que es la sombreada en la figura que está a continuación, es la siguiente:




$$S=\int_{-2\pi}^{-\pi} sen\ x\cdot dx+\int_{0}^{-\pi} sen\ x\cdot dx=\left[-\cos\ x\right]_{-2\pi}^{-\pi}+\left[-\cos\ x\right]_{0}^{-\pi}=-\left[\cos\ x\right]_{-2\pi}^{-\pi}-\left[\cos\ x\right]_{0}^{-\pi}=$$

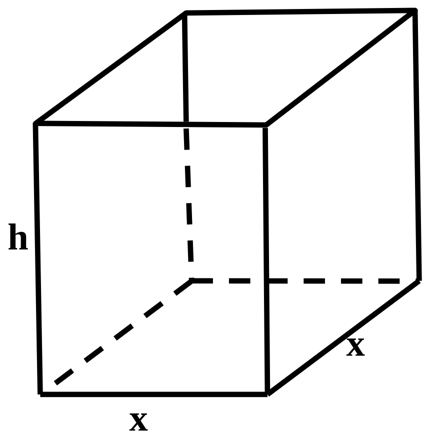
$$=-\left[\cos\left(-\pi\right)-\cos\left(-2\pi\right)\right]-\left[\cos\left(-\pi\right)-\cos\ 0\right]=-\cos\ \pi+\cos\ 2\pi-\cos\ \pi+\cos\ 0=$$

$$=-2\cos\ \pi+\cos\ 2\pi+\cos\ 0=-2\cdot\left(-1\right)+1+1=\underline{\underline{4\ u^2=S}}$$

**********

2-B) Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea de 10.000 cm$^3$. Sabiendo que cada cm$^2$ del material de la base sale un 50 % más caro que cada cm$^2$ del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible.

----------




Sabiendo que el volumen es 10.000 cm$^3$:

$$V = x^2 \cdot h = 10.000 \Rightarrow \underline{h = \frac{10.000}{x^2}}. \qquad (*)$$

La superficie de la base es $S_1 = x^2$ y la superficie del resto del envase es: $S_2 = x^2 + 4xh$ y que, teniendo en cuenta el valor de h se puede poner de la forma siguiente:

$$S_2 = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{10.000}{x^2} = x^2 + \frac{40.000}{x} = \underline{\frac{x^3 + 40.000}{x} = S_2}$$

Al ser el valor de la base el 50 % debe afectarse de un coeficiente de 1’5, con lo cual el precio es el siguiente, en función del lado de la base:

$$\text{Pr}\,ecop = P = \frac{x^3 + 40.000}{x} + 1'5 \cdot x^2 = \frac{x^3 + 40.000}{x} + \frac{3x^2}{2} = \frac{2x^3 + 80.000 + 3x^3}{2x} =$$

$$= \underline{\frac{5x^3 + 80.000}{2x} = P}$$

Para que el precio sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$P' = \frac{15x^2 \cdot 2x - \left(5x^3 + 80.000\right) \cdot 2}{4x^2} = \frac{15x^3 - 5x^3 - 80.000}{2x^2} = \frac{10x^3 - 80.000}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^3 - 80.000 = 0 \;\;;;\;\; x^3 - 8.000 = 0 \;\;;;\;\; x^3 = 8.000 = 20^3 \;\;;;\;\; \underline{x = 20\ cm}$$

Sustituyendo el valor de x en (*) obtenemos el valor de h:

$$h = \frac{10.000}{20^2} = \frac{10.000}{400} = \frac{100}{4} = \underline{25\ cm = h}$$

<u>El envase es un prisma cuadrangular regular de 20 cm de base y 25 cm de altura.</u>

**********

BLOQUE 3

3-A) Considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$.

a ) Comprueba que r y $\pi$ son paralelos.

b ) Calcula la distancia entre r y $\pi$.

c ) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en $\pi$ y sean paralelas a r.

----------

a )

Para que la recta r y el plano $\pi$ sean paralelos es necesario que el vector director de la recta sea paralelo (linealmente dependiente) al vector normal del plano.

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (-4,\ 3,\ 1)$.

El vector normal del plano $\pi$ es $\overrightarrow{n} = (3,\ 4,\ 0)$.

Para que dos vectores sean paralelos, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (-4,\ 3,\ 1) \cdot (3,\ 4,\ 0) = -12 + 12 + 0 = 0$$

*En efecto, r y $\pi$ son paralelos, como teníamos que comprobar.*

b )

La distancia entre r y $\pi$ es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta r es, por ejemplo, P(1, 2, 3).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto $P(1,\ 2,\ 3)$ y al plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$ es:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|3 + 8 - 6|}{\sqrt{9 + 16 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{1\ u = d(r,\ \pi)}}$$

c )

El haz de rectas paralelas a r tienen todas como vector director a $\overrightarrow{v} = (-4,\ 3,\ 1)$.

Para encontrar dos rectas paralelas a r y que estén contenidas en el plano $\pi$ basta encontrar dos puntos del plano, que no pertenezcan a r, y determinar las rectas que pasen por ellos con el vector director $\overrightarrow{v} = (-4,\ 3,\ 1)$.

Dos puntos pertenecientes al plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$ y que no pertenecen a la recta $r \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ son, por ejemplo, A(2, 0, 0) y B(-2, 3, 0).

Las rectas pedidas son:

$$s \equiv \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad t \equiv \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$$

**********

3-B) Considera los puntos A(1, 1, 1), B(2, 0, -1), C(5, 2, 1) y D(4, 3, 3).

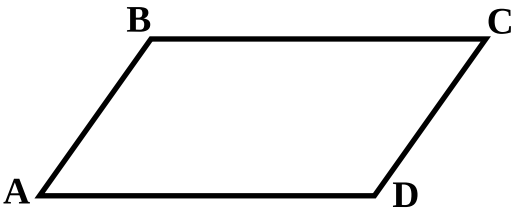
a ) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b ) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.

c ) Determina una ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

----------

a )




Siendo el paralelogramo de la forma que indica la figura, tiene que cumplirse que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ -1) - (1,\ 1,\ 1) = (1,\ -1,\ -2) \\ \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (5,\ 2,\ 1) - (4,\ 3,\ 3) = (1,\ -1,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$$

<u>En efecto, los puntos A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo.</u>

b )

Para que el paralelogramo sea un rectángulo tienen que ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, o sea, que su producto vectorial tiene que ser cero.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (5,\ 2,\ 1) - (2,\ 0,\ -1) = (3,\ 2,\ 2).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (1,\ -1,\ -2) \cdot (3,\ 2,\ 2) = 3 - 2 - 4 = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

<u>El paralelogramo A, B, C y D no es un rectángulo.</u>

c )

Para determinar la ecuación de un plano se necesitan dos vectores linealmente independientes y un punto.

La ecuación general del plano $\pi$ que contiene a los puntos A, B, C y D es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-2(x-1)-6(y-1)+2(z-1)+3(z-1)+4(x-1)-2(y-1)=0 \;\; ;;$$

$$2(x-1)-8(y-1)+5(z-1)=0 \;\; ;; \;\; 2x-2-8y+8+5z-5=0 \;\; ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-8y+5z+1=0}}$$

**********