PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2007

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse uno sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) a) Calcula la expresión analítica de una función $f: R \to R$ que verifique las condiciones siguientes:

a1) $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ para todo $x \in R$.

a2) El valor mínimo de $\{f(x): x \in R\}$ $es\ -12$.

b) Calcula los puntos de inflexión de la función f y en cada uno de ellos determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f.

c) Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de f a los ejes de coordenadas.

Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.

----

a)

La función pedida f, según la condición a1) tiene que ser una función primitiva de la función $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$, o sea:

$$f(x) = \int \left(2x^3 - 6x^2\right) \cdot dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + C = \underline{\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + C = f(x)}$$

Considerando la condición a2), vamos a determinar los mínimos relativos de la función.

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x^3-6x^2=0 \;;;\; 2x^2(x-3)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=3}.$$

$$f''(x)=6x^2-12x=6x(x-2) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(0)=0 \;\rightarrow\; (para \;\; punto \;\; de \;\; \inf lexión) \\ \\ f''(3)=18>0 \;\Rightarrow\; \underline{Mínimo \;\; para \;\; x=3} \end{cases}$$

Por ser -12 el valor de la función en el mínimo, tiene que cumplirse que $f(3)=12$:

$$f(3)=\frac{1}{2}\cdot 3^4-3\cdot 3^3+C=12 \;;;\; -\frac{1}{2}\cdot 3^4+C=12 \;;;\; C=12+\frac{81}{2}=\underline{\frac{105}{2}=C}$$

$$\underline{\underline{f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^3+\frac{105}{2}}}$$

b)

Para que exista un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada y que, para esos valores no se anule la tercera derivada.

$$f''(x)=6x^2-12x=6x(x-2) \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=2}$$

$$f'''(x)=12x-12=12(x-1) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f'''(0)=-12\neq 0 \;\rightarrow\; \underline{P.\;I.\;\; para \;\; x=0} \\ \\ f'''(2)=12\neq 0 \;\rightarrow\; \underline{P.\;I.\;\; para \;\; x=2} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^3+\frac{105}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(0)=\frac{105}{2} \;\rightarrow\; \underline{\underline{P.\;I. \;\Rightarrow\; A\left(0,\;\frac{105}{2}\right)}} \\ \\ f(2)=8-24+\frac{105}{2}=\frac{73}{2} \;\rightarrow\; \underline{\underline{P.\;I. \;\Rightarrow\; B\left(2,\;\frac{73}{2}\right)}} \end{cases}$$

La recta tangente a una función en un punto tiene como pendiente el valor de la derivada de la función en ese punto, por lo que las pendientes de las tangentes en los puntos A y B son las siguientes:

$$f'(x)=2x^3-6x^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m_A=f'(0)=\underline{0=m_A} \\ \\ m_B=2\cdot 2^3-6\cdot 2^2=16-24=\underline{-8=m_B} \end{cases}$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, las ecuaciones de las tangentes pedidas son:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(0,\ \dfrac{105}{2}\right) \\ m_A=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ t_1\equiv y-\frac{105}{2}=0\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{t_1\equiv 2y-105=0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} B\left(2,\ \dfrac{73}{2}\right) \\ m_B=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow\ t_2\equiv y-\frac{73}{2}=-8\cdot(x-2)\ ;;\ 2y-73=-16x+32\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{t_2\equiv 2y+16t-105=0}}$$

c) Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de f a los ejes de coordenadas.

Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.

Para justificar los puntos de corte con los ejes tenemos en cuenta que f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R.

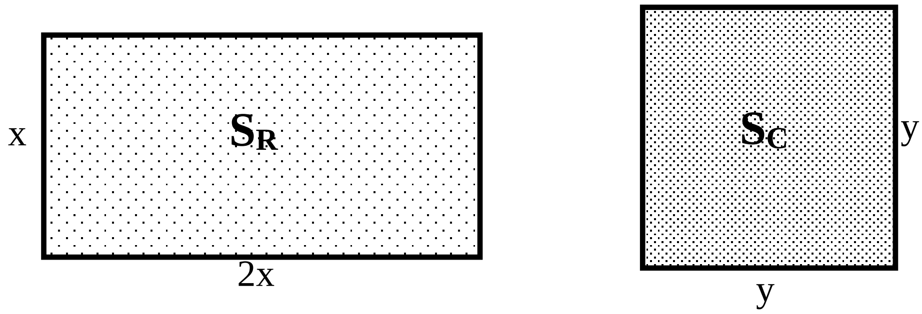
Por tener un mínimo, carecer de máximo y tener dos puntos de inflexión, el mínimo M(3, -12) es absoluto y, en consecuencia, el recorrido de la función es el siguiente: $R(f)\Rightarrow[-12,\ +\infty)$.

De lo anterior se deduce que

<u>La función corta al eje X en dos puntos y, lógicamente, al de ordenadas en uno.</u>

****

1-B) Un hilo de 34 metros se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura y que se usa todo el hilo en las figuras geométricas indicadas, hallar las longitudes de los trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.



La suma de los perímetros de las dos figuras es 34 metros:

$$Perímetro = P = 2 \cdot (x + 2x) + 4y = 6x + 4y = 34 \;\;;;\;\; 3x + 2y = 17 \;\;;;\;\; \underline{y = \frac{17 - 3x}{2}}$$

La superficie total es $S_T = S_R + S_C = 2x \cdot x + y^2 = \underline{2x^2 + \frac{(17 - 3x)^2}{4} = S_T}$.

La superficie será mínima cuando su derivada sea cero:

$$S'_T = 4x + \frac{1}{4} \cdot 2\,(17 - 3x) \cdot (-3) = 4x - \frac{3}{2}(17 - 3x) = 7x - \frac{51}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = \frac{51}{14}}$$

Sustituyendo el valor de x en la expresión de y, resulta:

$$y = \frac{17 - 3 \cdot \frac{51}{14}}{2} = \frac{\frac{238 - 153}{14}}{2} = \underline{\frac{85}{28} = y}$$

Las longitudes de los trozos de hilo son las siguientes:

$$L_R = 6x = 6 \cdot \frac{51}{14} = \underline{\underline{\frac{153}{7}\; metros = L_R}} \;\;;;\;\; L_C = 4y = 4 \cdot \frac{85}{28} = \underline{\underline{\frac{85}{7}\; metros = L_C}}$$

****

BLOQUE 2

2-A) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ mx+(m-1)y+z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$, donde $m \in R$.

a) Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ m & m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m-1+m^2+1-m(m-1)-1-m=m^2-m^2+m-1=$$

$$=m-1=0 \Rightarrow \underline{m=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

$$Para\ \ m=1 \ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rango\ \ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1+1-1-2=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=1 \Rightarrow Rango\ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos en el caso de compatible determinado por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ m & m-1 & 1\\ m+1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{m-1+m^2+(m+1)-m(m^2-1)-1-m}{m-1}=$$

$$=\frac{-2+m^2+m+1-m^3+m}{m-1}=\frac{-m^3+m^2+2m-1}{m-1}=\underline{\underline{-\frac{m^3-m^2-2m+1}{m-1}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m+1 & 1\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{m+m^2(m+1)+1-m^2-m-(m+1)}{m-1}=\frac{m^3+m^2+1-m^2-m-1}{m-1}=$$

$$=\frac{m^3-m}{m-1}=\frac{m(m^2-1)}{m-1}=\frac{m(m+1)(m-1)}{m-1}\underline{\underline{=m(m+1)=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m-1 & m\\ 1 & 1 & m+1\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{(m-1)(m+1)+m+m-(m-1)-m-m(m+1)}{m-1}=$$

$$=\frac{m^2-1+m-m+1-m^2-m}{m-1}=\underline{\underline{-\frac{m}{m-1}=z}}$$

c)

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, basta con que el término independiente de la última ecuación sea 1, con lo cual la matriz ampliada tiene iguales la primera y la cuarta columnas y, en consecuencia, los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango, independientemente del valor de m.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x+y+mz=1\\ mx+(m-1)y+z=m\\ x+y+z=1\end{cases}}}$$

****

2-B) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in R$.

a) Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

b) Para m = 2 resuelve los tres sistemas de ecuaciones siguientes: $AX = e_1$, $AY = e_2$ y $AZ = e_3$, donde e_1, e_2 y e_3 son respectivamente la primera, segunda y tercera columna de la matriz unidad (identidad) de orden tres.

c) Calcula la matriz B que cumple: $\frac{1}{3}AB - A = I$ para m = 2.

(Indicación: con los vectores X, Y y Z del apartado anterior puedes construir A^{-1}).

----

a)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m^2 - m^2 - 2 = 0 \;;;\; m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1 = 1} \\ \\ \underline{m_2 = -1} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A \;\; es \;\; inversible \;\; \forall m \in R, \;\; \{m \neq 1, \;\; m \neq -1\}}}$$

b)

Este apartado puede resolverse de las dos formas siguientes:

<u>Primera forma</u>: Utilizando de matriz inversa de A:

Para m = 2 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 2^2 - 1 = 3$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow$

$$Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

$$AX = e_1 \;;;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot e_1 \;;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot e_1 \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot e_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = X}}$$

$$AY = e_2 \;;;\; A^{-1} \cdot A \cdot Y = A^{-1} \cdot e_2 \;;;\; I \cdot Y = A^{-1} \cdot e_2 \;\Rightarrow\; Y = A^{-1} \cdot e_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = Y}}$$

$$AZ = e_3 \;;;\; A^{-1} \cdot A \cdot Z = A^{-1} \cdot e_3 \;;;\; I \cdot Z = A^{-1} \cdot e_3 \;\Rightarrow\; Z = A^{-1} \cdot e_3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = Z}}$$

<u>Segunda forma:</u>

$$\text{Siendo } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A \cdot X = e_1 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \underline{\frac{1}{3}} \;;;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \underline{-1} \;;;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \underline{-\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}}$$

$$\text{Siendo } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A \cdot Y = e_2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix}0&2&2\\1&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}}{|A|}=\underline{-\frac{2}{3}}\ ;;\ y_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&2\\2&0&1\end{vmatrix}}{3}=\underline{-1}\ ;;\ y_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&1\\2&0&0\end{vmatrix}}{3}=\underline{\frac{4}{3}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Y=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-1\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}}}$$

Siendo $Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A\cdot Z=e_3\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}z_1+2z_2+2z_3=1\\z_1+z_2+2z_3=0\\2z_1+z_3=0\end{cases}$

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix}0&2&2\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}}{|A|}=\underline{\frac{2}{3}}\ ;;\ z_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&2\\2&1&1\end{vmatrix}}{3}=\underline{0}\ ;;\ z_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&0\\1&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}}{3}=\underline{-\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Z=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}}}$$

c)

$$\frac{1}{3}AB-A=I\ ;;\ A\cdot B-3A=3I\ ;;\ A\cdot B=3I+3A=3(I+A)$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} en la última igualdad, queda:

$$A^{-1}\cdot A\cdot B=3I+3A=3\cdot A^{-1}\cdot(I+A)\ ;;\ I\cdot B=3\cdot A^{-1}\cdot(I+A)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ B=3\cdot A^{-1}\cdot(I+A)=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\1&-1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\1&-1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&2\\2&0&2\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}&\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+0&\frac{2}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\\2-1+0&2-2+0&2-2+0\\-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-0&-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\1&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}4&-2&2\\3&0&0\\-2&4&2\end{pmatrix}=B}}$$

****

BLOQUE 3

3-A) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Para las afirmaciones que consideres que son falsas pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si tres vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ cumplen $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$, entonces $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

b) No existen dos vectores $\overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ cumpliendo $\left|\overrightarrow{v}\right| = 1,\ \left|\overrightarrow{w}\right| = 2$ y $\left|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\right| = 3$.

c) Si tres vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

----

a)

Es falso.

Por ejemplo, si $\overrightarrow{u} = (3,\ -2,\ 1),\ \overrightarrow{v} = (4,\ 1,\ -2)\ y\ \overrightarrow{w} = (3,\ 0,\ -1)$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (3,\ -2,\ 1) \cdot (4,\ 1,\ -2) = 12 - 2 - 2 = 8 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = (3,\ -2,\ 1) \cdot (3,\ 0,\ -1) = 9 - 0 - 1 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}$$

$$\underline{Sin\ embargo\ \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{w}}.$$

b)

Es cierto.

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{w}\right| \cdot \cos\alpha$, siendo α el ángulo que forman los vectores, sería:

$$\left|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\right| = \left|\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{w}\right| \cdot \cos\alpha\right| = \left|1 \cdot 2 \cdot \cos\alpha\right| = \left|2 \cdot \cos\alpha\right| < 3,\ \forall \alpha \in R.$$

c)

Es cierto.

Si los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente independientes se puede establecer entre ellos una combinación lineal igual a cero: $\alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v} + \gamma \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, siendo necesariamente, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Vamos a demostrar que lo mismo se cumple con los vectores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

$\alpha\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)+\beta\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)+\gamma\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{0}$, o también lo siguiente:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{u}+(\alpha-\gamma)\cdot\overrightarrow{v}+(-\beta+\gamma)\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$$

Como $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes se tiene que cumplir que:

$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta+\lambda=0\\ \alpha-\lambda=0\\ -\beta+\lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ Sin embargo: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1-1-1=-3\neq 0$, con lo cual la solución única del sistema es la trivial, o sea: $\alpha=\beta=\gamma=0$, lo cual demuestra, en efecto, que los vectores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes.

****

3-B) Considera la recta y los planos siguientes:

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}, \ \pi_1 \equiv -3x+2y-z+2=0 \ \text{ y } \ \pi_2 \equiv 2x+2y-2z+3=0.$$

a) Determina la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) Determina la posición relativa de los dos planos.

c) Calcula la distancia de la recta al plano π_2.

----

a)

El vector director de la recta es $\overrightarrow{v}=(-3,\ 2,\ -1)$ y los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1}=(-3,\ 2,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 1,\ -1)$.

Por ser el vector director de la recta el mismo que el vector normal del plano π_1, $\underline{\underline{la\ \ recta\ \ r\ \ es\ \perp\ al\ \ plano\ \ \pi_2}}$.

Observando que $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_2}=(-3,\ 2,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ -1)=-3+2+1=0$, indica que los vectores son perpendiculares y en consecuencia, $\underline{\underline{la\ \ recta\ \ r\ \ es\ \ paralela\ \ al\ \ plano\ \ \pi_1}}$.

b)

Por ser $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$, $\underline{\underline{los\ \ planos\ \ \pi_1\ \ y\ \ \pi_2\ \ son\ \ perpendiculares}}$.

c)

La distancia entre r y el plano π_2 es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta r es, por ejemplo, P(2, 1, 4).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto $P(2,\ 1,\ 4)$ y al plano $\pi_2 \equiv 2x+2y-2z+3=0$ es:

$$d(r,\ \pi_2)=d(P,\ \pi_2)=\frac{|2\cdot 2+2\cdot 1-2\cdot 4+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|4+2-8+3|}{\sqrt{4+4+4}}=\frac{1}{\sqrt{12}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}\ u=d(r,\ \pi_2)}}$$

****