PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2008

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse uno sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) Razona si son derivables en el valor x = 0 cada una de las siguientes funciones de variable real:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x<0 \\ 2 & si \quad x=0 \\ x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$. b) $g(x)=\sqrt{x^3+x^2}$.

Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.

c) Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abscisas.

d) Si $h:R\rightarrow R$ y $g:R\rightarrow R$ verifica que $h'(x)=g'(x)$, entonces h(x) = g(x).

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=\underline{1} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=\underline{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(0)=2\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$$

La función no es continua para x = 0, por lo tanto:

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ no\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=0}}$$

b)

Es evidente la continuidad de la función para x = 0.

Una función es derivable en un punto si existen sus derivadas por la izquierda y por la derecha y ambas son iguales.

$$g'(x)=\frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}=\frac{x(3x-2)}{2x\sqrt{x+1}}=\underline{\frac{3x-2}{2\sqrt{x+1}}=g'(x)}.$$

$$g'(0^-)=g'(0^+)=\frac{3\cdot 0-2}{2\sqrt{0+1}}=\frac{-2}{2}=\underline{-1=g'(0)}$$

$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ g(x)=\sqrt{x^3+x^2}\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=0}}$$

c)

<u>Es cierto</u>.

Las funciones polinómicas de segundo grado son de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, cuyas derivadas son $f'(x)=2ax+b$ y $f''(x)=2a$, lo cual significa que, según que el signo de α sea positivo o negativo, la función tiene un mínimo o un máximo absoluto, respectivamente. La recta tangente en un máximo o mínimo es paralela al eje de abscisas.

d)

<u>En general, es falso</u>.

Evidentemente si dos funciones son iguales tienen la misma derivada, pero también se cumple que todas las funciones que se diferencien en una constante tienen la misma derivada.

Por ejemplo: las funciones $h(x)=3x^2+2x+1$ y $g(x)=3x^2+2x+7$ tienen la misma derivada y, evidentemente, son diferentes.

****

1-B) Considera las funciones $f,\ g: R \to R$ definidas por $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^3 + 3x^2$.

a) Dibuja las gráficas de las funciones f y g en el intervalo $[-3,\ 1]$, determinando previamente sus puntos de corte, así como, de la función g, determina los puntos de corte con los ejes, sus extremos relativos (máximos y mínimos) y su curvatura.

b) Calcula el área de los recintos limitados entre las gráficas de las dos funciones en el intervalo $[-3,\ 1]$.

----

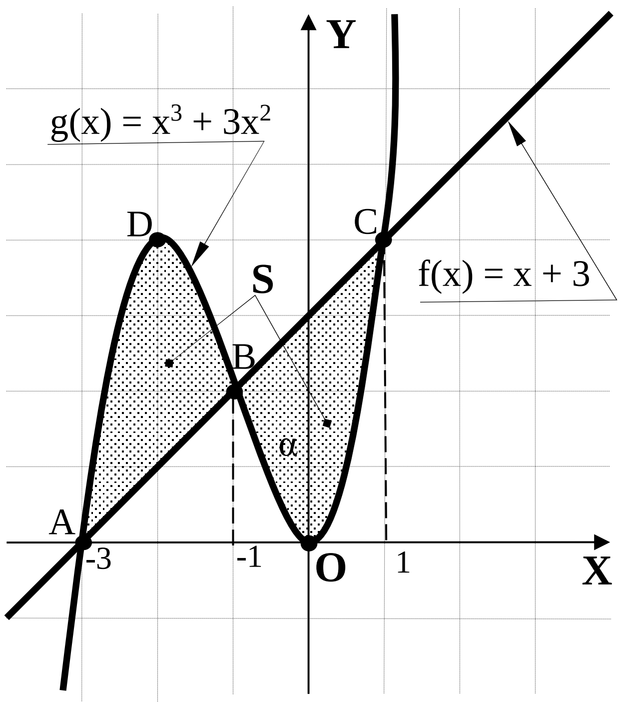
a)

Los puntos de corte de f y g son las soluciones de la ecuación que forman.

$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x + 3 = x^3 + 3x^2 \;\;;;\;\; x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \;\Rightarrow$ Resolviendo por Ruffini:

	1	3	-1	-3
1		1	4	3
	1	4	3	$\boxed{0}$
-1		-1	-3	
	1	3	$\boxed{0}$	
-3		-3		
	1	$\boxed{0}$		

Los puntos de corte so A(-3, 0), B(-1, 2) y C(1, 4).



Los puntos de corte con los ejes de la función $g(x) = x^3 + 3x^2$ son los siguientes:

$$Eje\ \ X \Rightarrow y = f(x) = 0 \;\;;;\;\; x^3 + 3x^2 = 0 \;\;;;\;\; x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = -3 \;\Rightarrow\; \underline{A(-3,\ 0)} \end{cases} \;;;\;\; \underline{Eje\ \ Y \;\Rightarrow\; O}$$

Los máximos y mínimos relativos de $g(x)=x^3+3x^2$ son los siguientes:

$$g'(x)=3x^2+6x=0 \;\Rightarrow\; 3x(x+2)=0 \;\;;;\;\; \underline{x_1=0} \;\;;;\;\; \underline{x_2=-2}$$

$$g''(x)=6x+6 \;\Rightarrow\; \begin{cases} g''(0)=6>0 \;\Rightarrow\; Mín.\;\; relativo\;\; para\;\; x=0 \;\Rightarrow\; Mín. \;\Rightarrow\; \underline{O(0,\; 0)} \\ \\ g''(-2)=-6<0 \;\Rightarrow\; Máx.\;\; relativo\;\; para\;\; x=-2 \;\Rightarrow\; Máx. \;\Rightarrow\; \underline{D(-2,\; 2)} \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad $(\cap)$ y convexidad $(\cup)$ son los siguientes:

$$g''(x)=6x+6=6(x+1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x=-1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x<-1 \;\Rightarrow\; g''(x)<0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Convexidad \;\Rightarrow\; (-\infty,\; -1)}} \\ \\ x>-1 \;\Rightarrow\; g''(x)>0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Concavidad \;\Rightarrow\; (-1,\; +\infty)}} \end{cases}$$

c)

De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-3}^{-1}[g(x)-f(x)]dx+\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-3}^{-1}\left[\left(x^3+3x^2\right)-(x+3)\right]dx+\int_{-1}^{1}\left[(x+3)-\left(x^3+3x^2\right)\right]dx=$$

$$=\int_{-3}^{-1}\left(x^3+3x^2-x-3\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(x+3-x^3-3x^2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+3x-\frac{x^4}{4}-x^3\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left[\frac{(-1)^4}{4}+(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}-3\cdot(-1)\right]-\left[\frac{(-3)^4}{4}+(-3)^3-\frac{(-3)^2}{2}-3\cdot(-3)\right]+$$

$$+\left(\frac{1^2}{2}+3\cdot 1-\frac{1^4}{4}-1^3\right)-\left[\frac{(-1)^2}{2}+3\cdot(-1)-\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}+3-\frac{1}{4}-1\right)-\left(\frac{1}{2}-3-\frac{1}{4}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}+2-\frac{1}{2}-\frac{81}{4}+18+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}=24-\frac{80}{4}+\frac{8}{2}=24-20+4=\underline{\underline{8\;u^2=S}}$$

****

BLOQUE 2

2-A) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 1 & 1 & m^2-m \end{pmatrix}$, donde $m \in R$.

a) Determina para qué valores de m la matriz A es singular (no inversible).

b) Calcula A^{-1} cuando A sea regular (inversible).

c) Calcula la matriz B que cumple: 3AB – A = I para m = 2.

----

a)

Una matriz es singular (no inversible) cuando su determinante es cero.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 1 & 1 & m^2-m \end{vmatrix}=0 \;;;\; -m^2-m^2+\left(m^2-m\right)=-2m^2+m^2-m=-m^2-m=0 \;;;$$

$$-m(m+1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=-1}$$

<u>La matriz A es singular para m = 0 y para m = -1.</u>

b)

Vamos a determinar A^{-1} utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m^2-m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2-F_1 \\ F_3 \to F_3-F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m^2-m & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1+F_2 \\ F_3 \to F_3-2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2-m & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{-m(m+1)}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m^2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(m+1)} & \frac{2}{m(m+1)} & \frac{-1}{m(m+1)} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1-m^2F_3 \\ F_2 \to F_2-m^2F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{m}{m+1} & \frac{-m+1}{m+1} & \frac{m}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{m+1} & \frac{-m+1}{m+1} & \frac{m}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{m(m+1)} & \frac{2}{m(m+1)} & \frac{-1}{m(m+1)} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{m}{m+1} & \frac{-m+1}{m+1} & \frac{m}{m+1} \\ \frac{-1}{m+1} & \frac{-m+1}{m+1} & \frac{m}{m+1} \\ \frac{-1}{m(m+1)} & \frac{2}{m(m+1)} & \frac{-1}{m(m+1)} \end{pmatrix}=\frac{1}{m+1}\cdot\begin{pmatrix} m & -m+1 & m \\ -1 & -m+1 & m \\ -\frac{1}{m} & \frac{2}{m} & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

c)

Para m = 2 es $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -2 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

$3A\cdot B-A=I\ ;;\ 3A\cdot B=I+A\ ;;\ A\cdot B=(I+A)\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1}, resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot(I+A)\cdot\frac{1}{3}\ ;;\ I\cdot B=\frac{1}{3}\cdot A^{-1}\cdot(I+A)\ ;;\ \underline{\underline{B=\frac{1}{3}\cdot A^{-1}\cdot(I+A)}}.$$

$$B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -2 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}8-2+4 & -4-2+4 & 0-8+12\\ -4-2+4 & 2-2+4 & -0-8+12\\ -2+2-1 & 1+2-1 & -0+8-3\end{pmatrix}=$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}10 & -2 & 4\\ -2 & 4 & 4\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}=B}}$$

****

2-B) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$, donde $m \in R$.

a) Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=m^2+1-(m+1)=m^2+1-m-1=m^2-m=m(m-1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=1}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Determinado}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{Para\ m=0 \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}$$

$$Para\ m=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{Para\ m=1 \Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}$$

b)

Resolvemos para m ≠ 0 y m ≠ 1, que resulta el sistema compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{m^2 + m + 1 - m - 1}{m(m-1)} = \frac{m^2}{m(m-1)} = \underline{\underline{\frac{m}{m-1} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{1 - m - 1}{m(m-1)} = \frac{-m}{m(m-1)} = \underline{\underline{\frac{-1}{m-1} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{m^2 + m - m}{m(m-1)} = \frac{m^2}{m(m-1)} = \underline{\underline{\frac{m}{m-1} = z}}$$

c)

Se trata de que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero, por ejemplo -1, y que no dependa de m.

Por ejemplo el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ \lambda x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ \lambda & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + \lambda - (m+1) = m^2 + \lambda - m - 1 = -1 \;;;\; \lambda = m - m^2 = \underline{m(1-m) = \lambda}.$$

Nota: Se ha igualado el valor del determinante a -1 para facilitar la expresión del coeficiente que se modifica.

Un ejemplo del sistema pedido es: $\underline{\underline{\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ m(1-m)x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}}}$

****

BLOQUE 3

3-A) Considera los planos siguientes: $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z - 2 = 0$.

a) Determina la posición relativa de los dos planos dados.

b) Halla una ecuación de la recta r que pasa por el punto A(1, 2, 3) y no corta a los planos π_1 y π_2.

c) Calcula un punto de la recta $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ que equidiste de A(1, 2, 3) y B(1, 1, 2).

----

a)

El estudio puede hacerse por vectores normales o por un sistema de ecuaciones.

Por vectores normales: Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 1,\ -1)$.

Los vectores normales son linealmente independientes, por lo tanto los planos son secantes, o sea, que se cortan en una recta r.

La ecuación de la recta r es $\underline{t \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases}}$.

Por sistema de ecuaciones. Los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z - 2 = 0$ determinan el sistema $\begin{cases} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M’ = 2 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

Rango M = 1 ;; Rango M’ = 2 $\rightarrow$ S. I. $\rightarrow$ Los planos son paralelos.

Rango M = Rango M’ = 1 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ Los planos son coincidentes.

La matriz M contiene al menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; el rango de ambas matrices es 2.

$$\underline{\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2\ \Rightarrow\ (S.C.I.)\ \Rightarrow\ Los\ \ planos\ \ son\ \ secantes\ \ (se\ \ cortan\ \ en\ \ una\ \ recta).}}$$

b)

Para hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A(1, 2, 3) y no corta a los planos π_1 y π_2 es necesario encontrar un vector $\overrightarrow{w}$ que sea paralelo a los dos planos, o sea, que sea perpendicular al mismo tiempo de los vectores normales de los planos. El vector $\overrightarrow{w}$ puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales.

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + j + k + k - i + j = 2j + 2k = (0,\ 2,\ 2) = \overrightarrow{w'} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (0,\ 1,\ 1)}$$

La recta r pedida, expresada por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}}$$

c)

Los puntos de la recta $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ tiene por expresión general $P(0,\ y,\ y)$.

Dados A(1, 2, 3) y B(1, 1, 2), tiene que cumplirse que $\overline{PA} = \overline{PB}$:

$$\overline{PA} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-y)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{1 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6y + y^2} = \underline{\sqrt{2y^2 - 10y + 14} = \overline{PA}}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-y)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{1 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 4y + y^2} = \underline{\sqrt{2y^2 - 6y + 6} = \overline{PB}}$$

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \sqrt{2y^2 - 10y + 14} = \sqrt{2y^2 - 6y + 6} \ ;;\ 2y^2 - 10y + 14 = 2y^2 - 6y + 6 \ ;;$$

$$-10y + 14 = -6y + 6 \ ;;\ 14 - 6 = -6y + 10y \ ;;\ 8 = 4y \ ;;\ \underline{y = 2}$$

<u>El único punto que cumple lo pedido es P(0, 2, 2).</u>

****

3-B) Considera los puntos A(α, 2, α), B(2, -α, 0) y C(α, 0, α + 2) con $\alpha \in R$.

a) Estudia si los tres puntos están alineados para algún valor de α.

b) Calcula para qué valor de α los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo isósceles y si, en algún caso, el triángulo es equilátero.

c) Para el valor α = 0 determina una ecuación general del plano π que contiene a B, A y C. Calcula los puntos de la forma P(β, β, β), con $\beta \in R$, cuya distancia al plano obtenido es $2\sqrt{3}/3$.

----

a)

Para que los puntos A(α, 2, α), B(2, -α, 0) y C(α, 0, α + 2) estén alineados es necesario que los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -\alpha,\ 0) - (\alpha,\ 2,\ \alpha) = \underline{(2-\alpha,\ -\alpha-2,\ -\alpha) = \overrightarrow{u}}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (\alpha,\ 0,\ \alpha+2) - (\alpha,\ 2,\ \alpha) = \underline{(0,\ -2,\ 2) = \overrightarrow{v}}$$

$$\frac{2-\alpha}{0} = \frac{-\alpha-2}{-2} = \frac{-\alpha}{2} \Rightarrow \left.\begin{cases} -2(2-\alpha) = 0 \\ -\alpha - 2 = \alpha \end{cases}\right\} \begin{matrix} \rightarrow \alpha = 2 \\ \rightarrow \alpha = -1 \end{matrix} \quad ???$$

<u>No existe ningún valor real de α para que los puntos A, B y C estén alineados.</u>

b)

El triángulo de vértices ABC es isósceles cuando se cumpla que $\overline{AB} = \overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-\alpha)^2 + (-\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{4 - 4\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \alpha^2} =$$

$$= \underline{\sqrt{3\alpha^2 + 8} = \overline{AB}} \ ;;\ \overline{AC} = \left|\overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \underline{\sqrt{8} = \overline{AC}}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \sqrt{3\alpha^2 + 8} = \sqrt{8} \Rightarrow \underline{\alpha = 0}$$

<u>Para α = 0 el triángulo ABC es isósceles.</u>

El triángulo sería equilátero cuando sea $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AC}$.

Para α = 0 la longitud de los lados iguales es $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ unidades$.

$$\overline{AC} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(\alpha-\alpha)^2 + (0-2)^2 + (\alpha+2-\alpha)} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \overline{AB}.$$

<u>El triángulo ABC es equilátero para α = 0.</u>

c)

Para el valor α = 0 los puntos son A(0, 2, 0), B(2, 0, 0) y C(0, 0, 2) y los vectores son $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (2,\ -2,\ 0)$ Y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0,\ -2,\ 2)$.

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -4x - 4(z-2) - 4y = 0\ ;;\ x + (z-2) + y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + z - 2 = 0}}$$

Sabiendo que la distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano de ecuación general Ax + By + Cz + D = 0 viene dada por la fórmula $d(P,\ \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, y siendo $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ la distancia del punto P(β, β, β) al plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$, es:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\beta + \beta + \beta - 2}{\pm\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3\beta}{\pm\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}\beta}{\pm 3} \Rightarrow 2 = \pm 3\beta \Rightarrow \underline{\beta_1 = \frac{2}{3}}\ ;;\ \underline{\beta_2 = -\frac{2}{3}}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ puntos\ \ pedidos\ \ son\ \ P_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\ \ y\ \ P_2\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}}$$

****