PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2009

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1º) Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces A · B = B · A.

b) Si B es una matriz cuadrada, entonces $(I+B)^2 = I + 2B + B^2$.

c) La suma de matrices regulares (inversibles) es una matriz regular (inversible).

----

a)

En general, es falso. Sin embargo, existen matrices que cumplen la propiedad conmutativa.

Ejemplo: Las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ cumplen que A · B = B · A.

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+6 & -2+8 \\ 3+6 & 6+8 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}} \\ \\ B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+6 & 2+4 \\ -3+12 & 6+8 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A\cdot B=B\cdot A}.$$

En particular se cumple siempre que A · A^{-1} = A^{-1} · A = I.

b)

Es verdadera.

$$(I+B)^2=(I+B)\cdot(I+B)=I^2+I\cdot B+B\cdot I+B^2=I+B+B+B^2=\underline{I+2B+B^2}\ .$$

c)

En general, es falso.

Por ejemplo, la matriz identidad y su opuesta son inversibles y su suma, que es la matriz nula, no es inversible.

****

2º) De un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas se sabe que tiene un parámetro $m \in R$ tal que:

1 -- Si se multiplica por la primera incógnita se obtiene el resultado de restar al número 1 la suma de las otras dos incógnitas.

2 -- Si se multiplica por la segunda incógnita se obtiene el resultado de restar al parámetro m la suma de las otras dos incógnitas.

3 -- Si se multiplica por la tercera incógnita se obtiene el resultado de restar al cuadrado de m la suma de las otras dos incógnitas.

a) Formula el sistema de ecuaciones lineales descrito.

b) Determina para qué valores de m el sistema es compatible determinado.

c) Determina para qué valores de m el sistema es compatible indeterminado y calcula todas las soluciones.

----

a)

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{l} mx = 1 - y - z \\ my = m - x - z \\ mz = m^2 - x - y \end{array}\right\}$ equivalente a $\underline{\underline{\left\{\begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{array}\right.}}$.

b)

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

$|M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces diferentes son m = 1 y m = -2.

$$\underline{\underline{Para\ \left.\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango\ \ M\ = 3 = n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ \det er \min ado}}$$

c)

Para m = 1 la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, en cuyo caso la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 1.

$$\underline{\underline{Para\ \ m = 1 \Rightarrow Rango\ M\ = Rango\ M' = 1 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ in\det er \min ado}}$$

(con dos grados de libertad)

El sistema se transforma en la ecuación $x + y + z = 1$, cuyas soluciones son:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \qquad\qquad ,\ \ \forall \lambda,\ \ \mu \in R \\ z = \mu \end{cases}}}$$

Para m = 2 es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 por ser:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 1 + 2 - 2 - 4 - 4 = 19 - 10 = 9 \neq 0.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m = 2 \Rightarrow Rango\ M\ = 2\ \ ;;\ \ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x<-1 \\ -\frac{1}{x} & si \;\; -1 \le x < 0 \\ x^2 & si \;\; x \ge 0 \end{cases}$.

a) Determina si la función es continua en los puntos x = -1 y x = 0.

b) En el intervalo (-1, 0) estudia si f crece o decrece, su curvatura y si tiene asíntotas.

c) Razona si la función es derivable en x = -1 y dibuja su gráfica para $x \in [-2,\; 2]$.

----

a)

La función f(x) es continua para todo R, excepto para los valores x = -1 y x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = -1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=-1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x+2) = \underline{1} \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(-\frac{1}{x}\right) = f(-1) = \underline{1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)}.$$

<u>La función es continua para x = -1</u>

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \;\; x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \underline{+\infty} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = f(0) = \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)}.$$

<u>La función no es continua para x = 0</u>

b)

En el intervalo (-1, 0) la función es $f(x) = -\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0, \ \ \forall x \in (-1, \ 0).$$

La función f(x) es monótona creciente en (-1, 0).

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} > 0, \ \ \forall x \in (-1, \ 0).$$

La función es convexa (U) en su dominio.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

La recta x = 0 (eje Y) es asíntota vertical de la función.

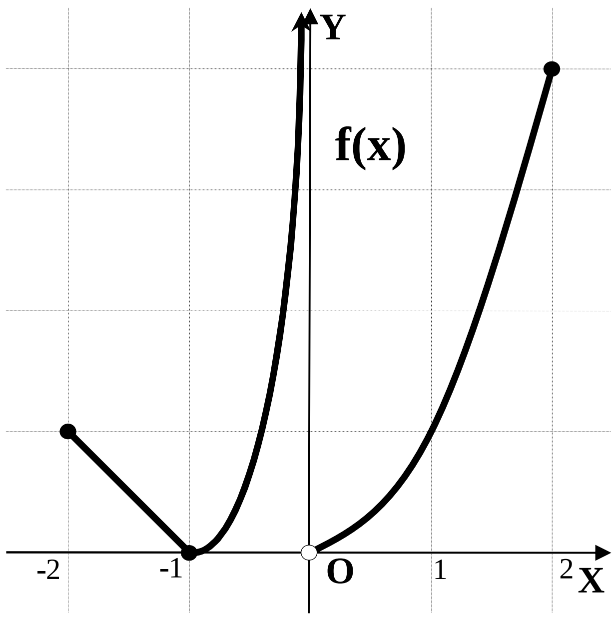
c)

Para que la función f(x) sea derivable en x = -1 es necesario que sea continua para x = -1, cosa que hemos comprobado en el apartado a).

Para que la función sea derivable para x = 1 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x < -1 \\ \frac{1}{x^2} & si \ \ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ f'(-1) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x < -1 \\ 1 \ \ si \ \ x \geq -1 \end{cases}.$$



La función f(x) es derivable en x = -1.

La gráfica de f(x) para $x \in [-2, \ 2]$ es la que aparece en el dibujo adjunto.

****

2º) a) Considera la función $g(x)=x^3+px^2+q$. Determina las constantes p y q sabiendo que, en x = 2, g alcanza un valor mínimo: 3.

b) Halla una función $f:R\rightarrow R$ que sea una primitiva de $f(x)=x$ y que su gráfica pase por el punto A(1, 2).

c) Justifica si en verdadera o falsa la afirmación siguiente: "Una función polinómica de segundo grado no tiene puntos de inflexión" Si la consideras falsa pon un ejemplo ilustrativo.

----

a)

$$g'(x)=3x^2+2px \Rightarrow g'(0=2) \Rightarrow 3\cdot 2^2+2p\cdot 2=0 \;;\; 12+4p=0 \;;\; 3+p=0 \Rightarrow \underline{\underline{p=4}}.$$

$$g(2)=3 \Rightarrow 2^3+4\cdot 2^2+q=3 \;;\; 8+16+q=3 \;;\; q=3-24 \Rightarrow \underline{\underline{q=-21}}.$$

b)

Una primitiva de $f(x)=x$ es $F(x)=\int x\cdot dx=\underline{\frac{x^2}{2}+C=F(x)}$.

Teniendo en cuenta que $F(1)=2 \Rightarrow \frac{1^2}{2}+C=2 \;;\; C=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

La función pedida es $\underline{\underline{F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x^2+3)}}$.

c)

Es cierto.

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que su segunda derivada sea cero y su tercera derivada sea distinta de cero.

Si la función polinómica es de segundo grado, la tercera derivada es siempre cero, por lo cual no puede tener puntos de inflexión.

****

BLOQUE 3

1º) a) Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores tales que $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=17$ y $\left|\overrightarrow{u}\right|=9$. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{v}$.

b) Considera los vectores $\overrightarrow{a}=(2,\ -1,\ 4)$ y $\overrightarrow{b}=(0,\ 3,\ m)$ con $m\in R$. Hallar el valor de m para que $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ sean ortogonales. Para m = 0 calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$.

----

a)

$$\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=17\ ;;\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=$$

$$=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\cos 0-\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\cos(-\alpha)-\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\cos 0=$$

$$=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot 1-\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\cos\alpha-\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot 1=$$

$$=\left|\overrightarrow{u}\right|^2-\left|\overrightarrow{v}\right|^2=17\ ;;\ 9^2-\left|\overrightarrow{v}\right|^2=17\ ;;\ 81-17=\left|\overrightarrow{v}\right|^2\ ;;\ \left|\overrightarrow{v}\right|^2=64\Rightarrow\underline{\underline{\left|\overrightarrow{v}\right|=8}}.$$

b)

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0.

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow(2,\ -1,\ 4)\cdot(0,\ 3,\ m)=0\ ;;\ 0-3+4m=0\ ;;\ 4m=3\Rightarrow\underline{\underline{m=\frac{3}{4}}}.$$

Para m = 0 es $\overrightarrow{b}=(0,\ 3,\ 0)$.

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan:

$$S=\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right\|=\left|6k-12j\right|=6\cdot\left|-2j+k\right|=6\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}=\underline{\underline{6\sqrt{5}\ u^2=S}}.$$

****

2º) Considera los planos $\pi_1 \equiv x-2y+2z+1=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ y el punto A(1, 0, -1).

a) Halla una ecuación general del plano que pasa por el punto A, es perpendicular a π_1 y además es paralelo a la recta r.

b) Se desea construir un cuadrado que tenga un vértice en el punto A y un lado sobre la recta s. Determina la longitud de un lado del cuadrado y las coordenadas del vértice que está en la recta r y es consecutivo al vértice A.

----

a)

Un vector director de r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i-j \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 0).$$

El vector normal de $\pi_1 \equiv x-2y+2z+1=0$ es $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ 2)$.

La ecuación general del plano pedido es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{n})=\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2(x-1)-2(z+1)-(z+1)-2y=0\ ;;$$

$$2(x-1)-3(z+1)-2y=0\ ;;\ 2x-2-3z-3-2y=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-2y-3z-5=0}}$$

b)

El haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene por ecuación general la siguiente: $\gamma \equiv x+y+D=0$.

De los infinitos planos del haz γ, el que contiene al punto A(1, 0, -1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \equiv x+y+D=0 \\ A(1,\ 0,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+D=0\ ;;\ \underline{D=-1} \Rightarrow \underline{\beta \equiv x+y-1=0}.$$

El punto B intersección de la recta r con el plano β es el vértice buscado:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases} \\ \beta \equiv x+y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=-1} \;;;\; 2x-1=0 \;;;\; \underline{x=\frac{1}{2}} \;;;\; y=x=\underline{\frac{1}{2}=y} \Rightarrow \underline{\underline{B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)}}.$$

La longitud del lado del cuadrado el la longitud del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+0}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unid.=\overline{AB}}}.$$

****