PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2009

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{cases}$, donde $m \in R$.

a) Determina para qué valores de m el sistema tiene una única solución y calcúlala.

b) Calcula todas las soluciones cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

----

a)

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario y suficiente que la matriz de coeficientes tenga rango tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 9+m+4-3-2m-6 = -m+4 = 0 \;;;\; \underline{m=4}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m \neq 4 \Rightarrow Rango\ \ M = 3 = n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ determinado}}$$

b)

Para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser el rango de la matriz ampliada dos para el valor de m = 4:

$$M'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 4 & 3 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2+C_3=C_4\}\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

En efecto, el sistema es compatible indeterminado para m = 4. Para resolverlo despreciamos una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y hacemos $\underline{z=\lambda}$.

$$\left.\begin{array}{l}x+2y+z=3\\ x+3y+2z=5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x+2y=3-\lambda\\ x+3y=5-2\lambda\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}-x-2y=-3+\lambda\\ x+3y=5-2\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{y=2-\lambda}\ ;;\ x=3-\lambda-2y=$$

$$=3-\lambda-4+2\lambda=\underline{-1+\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=2-\lambda\ ,\ \ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

c)

El sistema es siempre compatible: si m = 4 es sistema es compatible indeterminado y si m ≠ 4 es sistema es compatible determinado. Se entiende que sea siempre compatible determinado.

Se trata de que el determinante de la matriz de coeficientes sea siempre distinto de cero para lo se ha de eliminar la m en el desarrollo del determinante, para ello variamos, por ejemplo el coeficiente de z, quedando la matriz de la forma $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & m & p\end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & m & p\end{vmatrix}=3p+m+4-3-2m-2p=-m+p+4=0\Rightarrow \underline{p=m}.$$

El sistema resulta ser de la forma $\underline{\underline{\begin{cases}x+2y+z=3\\ x+3y+2z=5\\ x+my+mz=7\end{cases}}}$.

****

2º) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ m & 2\end{pmatrix}$, donde $m\in R$.

a) Determina el rango de la matriz $B\cdot A$.

b) Determina los valores de m para que la matriz $(A\cdot B)^t$ es regular (inversible).

c) Para m = 0 calcula una matriz X tal que $(A\cdot B)^t\cdot X=I$, siendo I la matriz identidad.

----

a)

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ m & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0+m & 0+0 & 0+1\\ 1+0 & -1+0 & -2+0\\ -m+2m & m+0 & 2m+2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ m & m & 2m+2\end{pmatrix}=B\cdot A}.$$

Para hallar el rango de (B · A) procedemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ m & m & 2m+2\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ m & 0 & 1\\ m & m & 2m+2\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2\to F_2-mF_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\to F_2-mF_1\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & m & 1+2m\\ 0 & 2m & 4m+2\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2\to \tfrac{1}{m}F_2\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & \frac{2m+1}{m}\\ 0 & 2m & 4m+2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-2mF_2\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & \frac{2m+1}{m}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\underline{Rango\ (B\cdot A)=2}}.$$

b)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ m & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ m & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0-1+2m & -1+0+4\\ 0-0+m & m+0+2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2m-1 & 3\\ m & m+2\end{pmatrix}=A\cdot B}.$$

$$(A\cdot B)^t=\underline{\begin{pmatrix}2m-1 & m\\ 3 & m+2\end{pmatrix}}.$$

$$\left|(A\cdot B)^t\right|=\begin{vmatrix}2m-1 & m\\ 3 & m+2\end{vmatrix}=(2m-1)(m+2)-3m=2m^2+4m-m-2-3m=2m^2-2=0\ ;;$$

$$2(m^2-1)=0\ ;;\ m^2-1=0\Rightarrow\underline{m_1=-1}\ ;;\ \underline{m_2=1}.$$

$$\underline{\underline{(A\cdot B)^t\ \ es\ \ inversible\ \ \forall m\in R-\{-1,\ 1\}}}$$

c)

$$(A \cdot B)^t \cdot X = I \;\; ;; \;\; \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \cdot (A \cdot B)^t \cdot X = I \cdot \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{X = \left[(A \cdot B)^t\right]^{-1}}}.$$

$$Para \;\; m = 0 \;\; es \;\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la matriz inversa utilizamos el método de Gauss-Jordan:

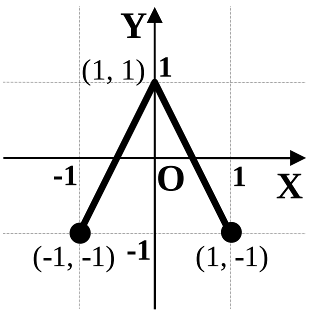
$$\left[(A \cdot B)^t / I\right] = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -3F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\left[(A \cdot B)^t\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}.$$

****

BLOQUE 2

1º) El dibujo adjunto representa la gráfica de la derivada de una función f en el intervalo $[-1,\ 1]$.



a) En el intervalo $[-1,\ 1]$ calcula la expresión analítica de la función f sabiendo, además, que el valor mínimo de $\{f(x): x \in [-1,\ 1]\}$ es 0.

b) Haz la representación gráfica de f y calcula el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta y = ¼.

----

a)

De la observación de la gráfica se deduce que la función derivada se puede expresar analíticamente definida a trozos de la forma siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ -2 \le x \le 0 \\ -2x+1 & si\ 0 < x \le 2 \end{cases}.$$

Integrando la función derivada se obtiene la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+C_1 & si\ -1 \le x \le 0 \\ -x^2+x+C_2 & si\ 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

Por existir la función derivada para x = 0, la función es continua para este valor, lo que significa que los límites laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2+x+C_1\right) = C_1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-x^2+x+C_1\right) = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C_1 = C_2}.$$

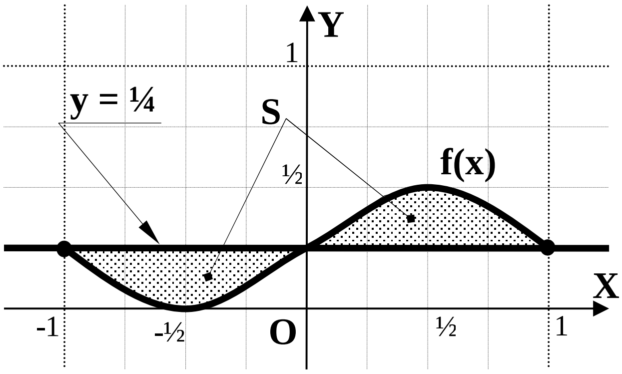
La función resulta una parábola convexa $(\cup)$ en el intervalo [-1, 0] que tiene un mínimo y una parábola cóncava $(\cap)$ en el intervalo [0, 1] que tiene un máximo. Como nos dicen que $\{f(x): x \in [-1,\ 1]\}$, el mínimo tiene que estar necesariamente en el intervalo [-1, 0] y su valor es cero.

Considerando la función $f(x) = x^2+x+C_1$, tiene que ser $f'(x) = 2x+1 = 0 \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}}$.

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + C_1 = 0\ ;;\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C_1 = 0\ ;;\ C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{4} = C_1}.$$

La función resulta ser: $f(x)=\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{4} & si\ \ -1\le x\le 0 \\ -x^2+x+\frac{1}{4} & si\ \ 0<x\le 1 \end{cases}$.

b)



La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta, donde se han tenido en cuenta que $f(-1)=f(0)=f(1)=\frac{1}{4}$.

De la observación de la figura se deduce el área que tenemos que calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{4}-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)\right]\cdot dx+\int_{0}^{1}\left[\left(-x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\right]\cdot dx=$$

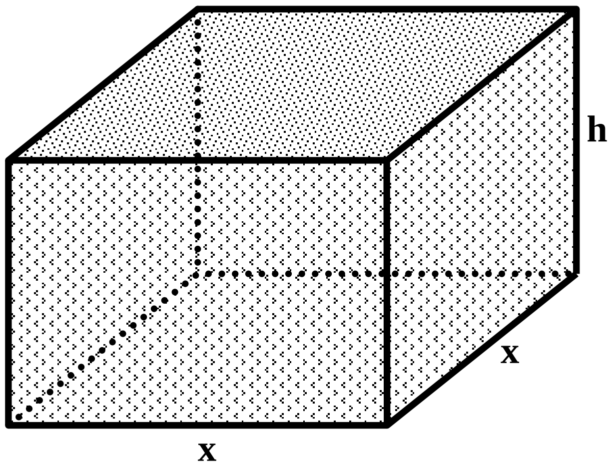
$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{4}-x^2-x-\frac{1}{4}\right)\cdot dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot dx==\int_{-1}^{0}\left(-x^2-x\right)\cdot dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+x\right)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=0-\left[-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}\right]+\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-0=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1-\frac{2}{3}=$$

$$\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}u^2=S.$$

****

2º) Una caldera tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 100 unidades por metro cuadrado, mientras que a través del techo es de 300 unidades por metro cuadrado. La pérdida por el suelo es tan pequeña que puede considerarse nula. Calcula las dimensiones de la caldera para que la pérdida de calor sea mínima. Justifica que el punto calculado proporciona la mínima pérdida de calor.



Sean las dimensiones del almacén las indicadas en el dibujo adjunto.

La relación que existe entre las dimensiones del lado de la base y la altura pueden relacionarse a partir del volumen:

$$V = x^2 \cdot h = 768 \;\Rightarrow\; \underline{h = \frac{768}{x^2}}$$

La pérdida total de calor es la siguiente:

$$P = 4 \cdot (x \cdot h) \cdot 100 + x^2 \cdot 300 = \underline{400xh + 300x^2 = P}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de h en la expresión de P, resulta:

$$P = 400x \cdot \frac{768}{x^2} + 300x^2 = 300x^2 + 307200 \cdot \frac{1}{x}.$$

Para que la pérdida de calor sea mínima tiene que ser cero su derivada:

$$P' = 600x - 307200 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 600x = \frac{307200}{x^2} \;;;\; x^3 = \frac{307200}{600} = \frac{3072}{6} = 512.$$

$$x = \sqrt[3]{512} = \underline{\underline{8 \; metros = x}} \qquad h = \frac{768}{x^2} = \frac{768}{8^2} = \frac{768}{64} = \underline{\underline{12 \; metros = h}}$$

Para justificar que se trata de un mínimo tenemos que demostrar que la segunda derivada es positiva para el valor de x = 8:

$$P'' = x + 307200 \cdot \frac{2}{x^3} \;\Rightarrow\; \underline{P''(8) > 0, \; c.q.j.}$$

****

BLOQUE 3

1º) Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa por un ejemplo ilustrativo.

a) Dados α, b y c reales cualesquiera, los vectores $\overrightarrow{m}=(1,\ a,\ b)$, $\overrightarrow{n}=(0,\ 1,\ c)$ y $\overrightarrow{p}=(0,\ 0,\ 1)$ son linealmente dependientes.

b) Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son dos vectores verificando que $\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=0$, entonces $\overrightarrow{u}=0$ o $\overrightarrow{v}=0$.

c) Dados los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tres vectores , si $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$ entonces $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a cualquier vector de la forma $\alpha\cdot\overrightarrow{v}+\beta\cdot\overrightarrow{w}$, siendo α y β números reales.

----

a)

Es falso. Los vectores $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{p}$ son linealmente independientes.

Tres vectores son linealmente independientes cuando el rango de la matriz que determinan es tres, o sea, cuando el determinante de la matriz que determinan es distinto de cero:

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right\}=3}.$$

b)

Es falso.

$\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right|=\left|\overrightarrow{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|\cdot sen\ \alpha=0$ no implica que $\overrightarrow{u}=0$ o $\overrightarrow{v}=0$; puede ser $sen\ \alpha=0$.

Si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente dependientes (paralelos), su producto vectorial es cero sin necesidad de ser nulos ninguno de los dos.

c)

Si $\overrightarrow{u}$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$ se cumple que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=0$.

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva de la multiplicación cor respecto a la suma del producto escalar es:

$$\overrightarrow{u}\cdot\left(\alpha\cdot\overrightarrow{v}+\beta\cdot\overrightarrow{w}\right)=a\cdot\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)+\beta\cdot\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\right)=a\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

La afirmación es cierta.

****

2º) Los puntos A(1, 1, 0) y B(2, 2, 1) son dos vértices consecutivos de un rectángulo. Además, se sabe que los otros dos vértices son puntos de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

a) Halla los otros dos vértices del rectángulo.

b) Determina una ecuación general del plano que contiene a los cuatro vértices.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ 1,\ 1)$.

La recta r que pasa por el origen y tiene como vector director a $\overrightarrow{u}=(1,\ 1,\ 1)$ tiene por ecuaciones paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}$.

El haz de planos β perpendiculares a la recta r tiene por expresión general la siguiente: $\beta\equiv x+y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, los que contienen a los puntos A y B son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\beta\equiv x+y+z+D=0\\A(1,\ 1,\ 0)\end{array}\right\}\Rightarrow 1+1+0+D_1=0\ ;;\ \underline{D_1=-2}\ \Rightarrow\ \underline{\pi_1\equiv x+y+z-2=0}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta\equiv x+y+z+D=0\\B(2,\ 2,\ 1)\end{array}\right\}\Rightarrow 2+2+1+D_2=0\ ;;\ \underline{D_2=-5}\ \Rightarrow\ \underline{\pi_2\equiv x+y+z-5=0}.$$

Los otros dos vértices C y D del rectángulo son las intersecciones de la recta r con los planos π_2 y π_1, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}\\\pi_2\equiv x+y+z-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+\lambda+\lambda-5=0\ ;;\ 3\lambda-5=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{5}{3}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{C\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{3}\right)}}.$$

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}\\\pi_1\equiv x+y+z-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+\lambda+\lambda-2=0\ ;;\ 3\lambda-2=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{2}{3}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)}}.$$

b)

Los puntos A y C determinan el vector $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{AC} = C - A = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$.

Un vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AC}$ es $\overrightarrow{w} = (2,\ 2,\ 5)$.

El plano π pedido contiene al punto A(1, 1, 0) y tiene como vectores directores a $\overrightarrow{u} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{w} = (2,\ 2,\ 5)$. Su expresión general es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 5(x-1)+2(y-1)+2z-2z-2(x-1)-5(y-1)=0\ ;;$$

$$3(x-1)-3(y-1)=0\ ;;\ 3x-3-3y+3=0\ ;;\ 3x-3y=0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-y=0}}$$

****