OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1.- (3'25 puntos) Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+mz=m-1 \\ x+(m+1)y+(2m+1)z=m \quad , \quad m\in\Re \\ -x-2y+z=2 \end{cases}$$

Estúdialo para los distintos del parámetro **m** y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 2m+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m+1-2(2m+1)-2m+m(m+1)+2(2m+1)-2=-m-1+m^2+m$$

$$|A|=m^2-1\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\{-1\,,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Num.\ incognitas\Rightarrow Sist.\ Comp.\ Determinado$$

$$Soluciones\ para\ el\ Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m-1 & 2 & m \\ m & m+1 & 2m+1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{(m+1)(m-1)+4(2m+1)-2m^2-2m(m+1)+2(m-1)(2m+1)-2m}{(m-1)\cdot(m+1)}=$$

$$=\frac{m^2-1+8m+4-2m^2-2m^2-2m+4m^2+2m-4m-2-2m}{(m-1)\cdot(m+1)}=\frac{m^2+2m+1}{(m-1)\cdot(m+1)}=\frac{(m+1)^2}{(m-1)\cdot(m+1)}$$

$$x=\frac{m+1}{m-1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 2m+1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m+2m-(2m+1)(m-1)+m^2-2(2m+1)-(m-1)}{(m-1)\cdot(m+1)}=$$

$$=\frac{m^2+3m-2m^2+2m-m+1-4m-2-m+1}{(m-1)\cdot(m+1)}=\frac{-m^2-m}{(m-1)\cdot(m+1)}=-\frac{m\cdot(m+1)}{(m-1)\cdot(m+1)}=-\frac{m}{m-1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m+1 & m \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{2m+2-2m-2m+2+(m^2-1)+2m-4}{(m-1)\cdot(m+1)}=\frac{m^2-1}{m^2-1}=1$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{m+1}{m-1}\,,-\frac{m}{m-1}\,,1\right)$$

Continuación del Problema 1 de la Opción del Examen nº1

$$Si\ m=-1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow -2y=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-z=-2 \Rightarrow x=-1+z$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-1+\lambda\ ,-\frac{1}{2}\ ,\ \lambda\right)$$

$$Si\ m=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=-1 \Rightarrow z=-\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible$$

2.-

a) **(1'75 puntos)** Determina los valores de **a** y **b** para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-x-a}{b\ sen\left(x^2\right)} & si \quad x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x=0 \end{cases}$$ sea continua en **x = 0**

b) **(1'75 puntos)** Determina la función, $g:\Re\rightarrow\Re$, que verifica: **g(0) = 1**, **g'(0) = 3** y **g''(x) = (2 + x) e^x + 2**, todo $x\in\Re$

$a\,)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-a}{b\ sen\left(x^2\right)}=\frac{e^0-0-a}{0\ sen\left(0^2\right)}=\frac{1-a}{0\cdot sen\ 0}\frac{1-a}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Para\ que\ se\ cumpla\ 1-a=0\Rightarrow a=1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{b\ sen\left(x^2\right)}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{b\cdot 2x\cos\left(x^2\right)}=\frac{e^0-1}{b\cdot 2\cdot 0\cdot\cos\left(0^2\right)}=\frac{1-1}{b\cdot 2\cdot 0\cdot\cos(0)}=$$

$$=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{b\cdot\left[2\cos\left(x^2\right)-4x^2 sen\left(x^2\right)\right]}=\frac{e^0}{b\cdot\left[2\cos\left(0^2\right)-4\cdot 0^2 sen\left(0^2\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{b\cdot\left(2\cos 0-4\cdot 0^2\ sen\ 0\right)}=\frac{1}{b\cdot\left(2\cdot 1-4\cdot 0^2\cdot 0\right)}=\frac{1}{2b}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2b}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=1\Rightarrow Solución\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$b)$

$$g'(x)=\int g''(x)\,dx=\int\left[(2+x)e^{x}+2\right]dx=\int(2+x)e^{x}\,dx+\int 2\,dx=e^{x}(2+x)-\int e^{x}dx+2x$$

$$Por\ partes \rightarrow \begin{cases} 2+x=u \Rightarrow dx=du \\ e^{x}\,dx=dv \Rightarrow v=\int e^{x}\,dx=e^{x} \end{cases}$$

$$g'(x)=e^{x}(2+x)-e^{x}+2x=e^{x}(2+x-1)+2x=e^{x}(1+x)+2x+K$$

$$g'(0)=3 \Rightarrow e^{0}(1+1)+2\cdot 1+K=3 \Rightarrow 1\cdot 2+2+K=3 \Rightarrow 4+K=3 \Rightarrow K=-1$$

$$g'(x)=e^{x}(1+x)+2x-1 \Rightarrow g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left[(1+x)e^{x}+2x-1\right]dx$$

$$g(x)=\int\left[(1+x)e^{x}\right]dx+2\int x\,dx-\int dx=e^{x}(1+x)-\int e^{x}dx+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{2}-x=e^{x}(1+x)-e^{x}+x^{2}-x$$

$$\begin{cases} 1+x=u \Rightarrow dx=du \\ e^{x}\,dx=dv \Rightarrow v=\int e^{x}\,dx=e^{x} \end{cases}$$

$$g(x)=e^{x}(1+x-1)+x^{2}-x=xe^{x}+x^{2}-x+C \Rightarrow g(0)=1 \Rightarrow 0\cdot e^{0}+0^{2}-0+C=1 \Rightarrow C=1 \Rightarrow$$

$$g(x)=xe^{x}+x^{2}-x+1$$

3.-

a) **(1’25 puntos)** Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales y de módulo **1**. Hallar los valores del parámetro **a** para que los vectores $\vec{u}+a\vec{v}$ y $\vec{u}-a\vec{v}$ formen un ángulo de **60º**

b) **(1 punto)** Halla un vector $\vec{z}$, de modulo **1** y que sea ortogonal a los vectores $\vec{x}=(1\,,2\,,1)$ e $\vec{y}=(0\,,1\,,1)$

c) **(1 punto)** Justifica si es verdadera o falsa la afirmación siguiente. Si la consideras falsa, pon un ejemplo ilustrativo

“Si $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$, son tres vectores no nulos que cumplen $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ entonces $\vec{b}=\vec{c}$”

$a)$

$$\begin{cases} \vec{v_1}=(1\,,a) \\ \vec{v_2}=(1\,,-a) \end{cases} \Rightarrow \cos 60º=\frac{\left|\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}\right|}{\left|\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v_2}\right|} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{\left|(1\,,a)\cdot(1\,,-a)\right|}{\sqrt{1^{2}+a^{2}}\cdot\sqrt{1^{2}+(-a)^{2}}} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{\left|1-a^{2}\right|}{\sqrt{1+a^{2}}\cdot\sqrt{1+a^{2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1-a^{2}}{1+a^{2}} \Rightarrow 1+a^{2}=2-2a^{2} \Rightarrow 3a^{2}=1 \Rightarrow a^{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ a=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

b) Es el producto vectorial de los dos vectores, después normalizaremos el vector resultante

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{i} - \vec{j} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{z} = (1\ , -1\ , 1) \Rightarrow \left|\vec{z}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$Vector\ unitario \Rightarrow \left\|\vec{z}\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ , -\frac{1}{\sqrt{3}}\ , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ , -\frac{\sqrt{3}}{3}\ , \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$c)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| .sen\ \alpha \\ \vec{a} \times \vec{c} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| .sen\ \beta \end{cases} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| .sen\ \alpha = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| .sen\ \beta \Rightarrow \left|\vec{b}\right| .sen\ \alpha = \left|\vec{c}\right| .sen\ \beta,\ como\ sen\ \alpha \neq sen\ \beta \Rightarrow \left|\vec{b}\right| \neq \left|\vec{c}\right|$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $donde\ m\in\Re$

a) **(1'25 puntos)** Determina para que valores del parámetro **m** la matriz **A** es regular (inversible)

b) **(1 punto)** Para **m = 1** calcula la matriz **X** que cumple **X – B² = AB**

c) **(1 punto)** Para **m = 1** estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ tiene solución. En caso afirmativo, calcula su solución

a) La condición necesaria y suficiente para que sea regular es que el determinante de la matriz no sea nulo

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix}=(m-1)\cdot(m+1)\cdot(m+2)+2\cdot(m-1)-2\cdot(m-1)\cdot(m+2)-(m-1)\cdot(m+1)$$

$$|A|=(m-1)\cdot[(m+1)\cdot(m+2)+2-2\cdot(m+2)-(m+1)]=(m-1)\cdot\left(m^2+2m+m+2+2-2m-4-m-1\right)$$

$$|A|=(m-1)\cdot\left(m^2-1\right)=(m-1)\cdot(m-1)\cdot(m+1)=(m-1)^2\cdot(m+1)$$

$$\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(m-1)^2\cdot(m+1)=0\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}(m-1)^2=0\Rightarrow m-1=0\Rightarrow m=1\\ m+1=0\Rightarrow m=-1\end{cases}$$

$$(Para\ toda)\forall m\in\Re-\{-1\ ,1\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow La\ matriz\ es\ regular\Rightarrow(Existe)\exists A^{-1}$$

$b)$

$$X=B^2+AB=(B+A)B\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=(B+A)B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$c)$ *Como A no es invertible el sistema no puede ser Compatible Determinado, veamos si es indeterminado para que tenga soluciones infinitas*

$$\begin{cases} y=2 \\ 3y+2z=8 \\ 3y+2z=8 \end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow y=2\Rightarrow 3\cdot 2+2z=8\Rightarrow 2z=2\Rightarrow z=1$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(\lambda\ ,2\ ,1)$$

2.-

a) **(1'25 puntos)** Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ una función derivable en todos los puntos tal que **f(2) = 0** y **f'(2) = -3**.
Considera la función **h(x) =** $\mathbf{e^{f(x)} + x\cos[f(x)] + [f(x)]^2}$. Calcula razonadamente **h'(2)**

b) **(1'25 puntos)** Determina si la función $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ es derivable en **x = 0**

c) **(1 punto)** Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si la consideras falsa, pon un ejemplo ilustrativo:

"Si $f:\Re\rightarrow\Re$ es una función con $f'(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<0\\ 1 & si \quad x>0\end{cases}$ entonces la función f no es continua"

a)

$$h'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}+\cos[f(x)]-x\cdot sen[f(x)]\cdot f'(x)+2\cdot[f(x)]\cdot f'(x)\Rightarrow$$
$$h'(2)=f'(2)\cdot e^{f(2)}+\cos[f(2)]-2\cdot sen[f(2)]\cdot f'(2)+2\cdot[f(2)]\cdot f'(2)\Rightarrow$$
$$h'(2)=-3\cdot e^{0}+\cos 0-2\cdot sen\,0\cdot(-3)+2\cdot 0\cdot(-3)=-3\cdot 1+1-2\cdot 0\cdot(-3)+2\cdot 0\cdot(-3)=-3+1-0+0=-2$$

$b)$

$$x>0\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & si \quad x<0\\ \dfrac{1}{1+x} & si \quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & si \quad x<0\\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} & si \quad x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{1}{(1-0)^2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-\dfrac{1}{(1-0)^2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$Como\ \lim_{x\to 0^-} f'(x)=1\neq\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-1\Rightarrow La\ \ función\ es\ no\ derivable$$

3.- Considera los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 3 \\ \pi_2 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_1 \equiv 3x - y - az = b \end{cases}$ donde $a, b \in \Re$

a) **(1'25 puntos)** Determina el valor de los parámetros **a** y **b** para que los planos se corten en una recta **r**
b) **(1 punto)** Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta **r**
c) **(1 punto)** Halla una ecuación general del plano π que contiene a la recta **r** y que pasa por el punto **Q = (2 , 1 , 3)**

a) La recta **r** queda determinada por los dos primeros planos, para que este contenido en el tercero tendremos, una vez determinado su vector director, este es perpendicular al vector director del plano y su producto escalar es nulo. Además un punto cualquiera de la recta (tomaremos el punto **R** determinado en la ecuación) esta contenido en el tercer plano y por lo tanto verifica su ecuación

$a)$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 - y + z = 2 \Rightarrow y = -1 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + z \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ R(1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_3}} = (3, -1, -a) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_{\pi_3}} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_3}} = 0 \Rightarrow (0, 1, 1) \cdot (3, -1, -a) = 0 \Rightarrow -1 - a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$3 \cdot 1 - (-1) - (-1) \cdot 0 = b \Rightarrow b = 3 + 1 = 4$$

$b)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + z \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Es un plano que contiene el vector director de la recta r, el vector formado por un punto cualquiera de la recta **r** (tomamos el punto R determinado en su ecuación) y el punto **Q** y un tercer y último vector formado por este punto y el punto G, genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios y por ello el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida.

$a)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{QR} = (1, -1, 0) - (2, 1, 3) = (-1, -2, -3) \equiv (1, 2, 3) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{QG} = (x, y, z) - (2, 1, 3) = (x-2, y-1, z-3) \end{cases}$$

$$3(x-2) + y - 1 - z + 3 - 2(x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 + y - 1 - z + 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$