OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1.- Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros y sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas

a) **(1 punto)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuantos helados de cada tipo se han vendido

b) **(1'25 puntos)** Estudia para que valores del parámetro k el sistema tiene solución. ¿Es posible que hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas?

c) **(1 punto)** Para **k = 3**, calcula cuantos helados de cada tipo se han vendido

a)

Siendo U = helados de una bola D = helados de dos bolas T = helados de tres bolas

$$\begin{cases} U+D+T=157 \\ U+2D+3T=278 \\ U=kT \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U+D+T=157 \\ U+2D+3T=278 \\ U-kT=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = -2k+3-2+k = -k+1 \Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow -k+1=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow$$

$$(Para\ todo)\forall k \in N-\{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=\text{Número de incognitas} \Rightarrow Sist.Comp.Determinado$$

No es posible que el número de helados de 1 bola sea igual al de 3, es el caso excluido **k = 1**

c)

$$\begin{cases} U+D+T=157 \\ U+2D+3T=278 \\ U-3T=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 0 & -1 & -4 & -157 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 0 & 1 & 2 & 121 \\ 0 & 0 & -2 & -36 \end{array}\right) \Rightarrow -2T=-36 \Rightarrow$$

$$T=\frac{36}{2}=18 \Rightarrow D+2\cdot 18=121 \Rightarrow D=121-36=85 \Rightarrow U+85+18=157 \Rightarrow U=157-103=54$$

$$Solución \Rightarrow (U\ ,D\ ,T)=(54\ ,85\ ,18)$$

2.- Considera la función: $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-4x}$

a) **(1'25 puntos)** Calcula el dominio y las asíntotas de la función **f**
b) **(1'25 puntos)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función **f.** Dibuja su gráfica
b) **(1 punto)** Calcula la integral $\int f\left(x\right)dx$

a)

$$x^2-4x=0\Rightarrow\left(x-4\right)x=0\Rightarrow\begin{cases}x-4=0\Rightarrow x=4\Rightarrow\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{4^2-4\cdot 4}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow\ AV\\ x=0\Rightarrow\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{0^2-4\cdot 0}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow\ AV\end{cases}$$

$$Dom\left(f\right)=\forall x\in\Re-\left\{0\ ,4\right\}$$

Asíntotas verticales

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow Asíntota\ vertical$$

$$x=4\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-}\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 4^+}\ f\left(x\right)=\dfrac{2}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow Asíntota\ vertical$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-4x}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow Existe\ Asíntota\ horizontal\ \ y=0\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(-x\right)^2-4\left(-x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+4x}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow\exists\ Asínt.\ horizontal\ \ y=0\ cuando\ x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2-4x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3-4x^2}=\frac{2}{\infty}=0\Rightarrow No\ existe\ Asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2-4x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{-x^3-4x^2}=\frac{2}{-\infty}=0\Rightarrow No\ existe\ Asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to-\infty$$

Continuación Problema 2 de la Opción del Examen nº 1

b)

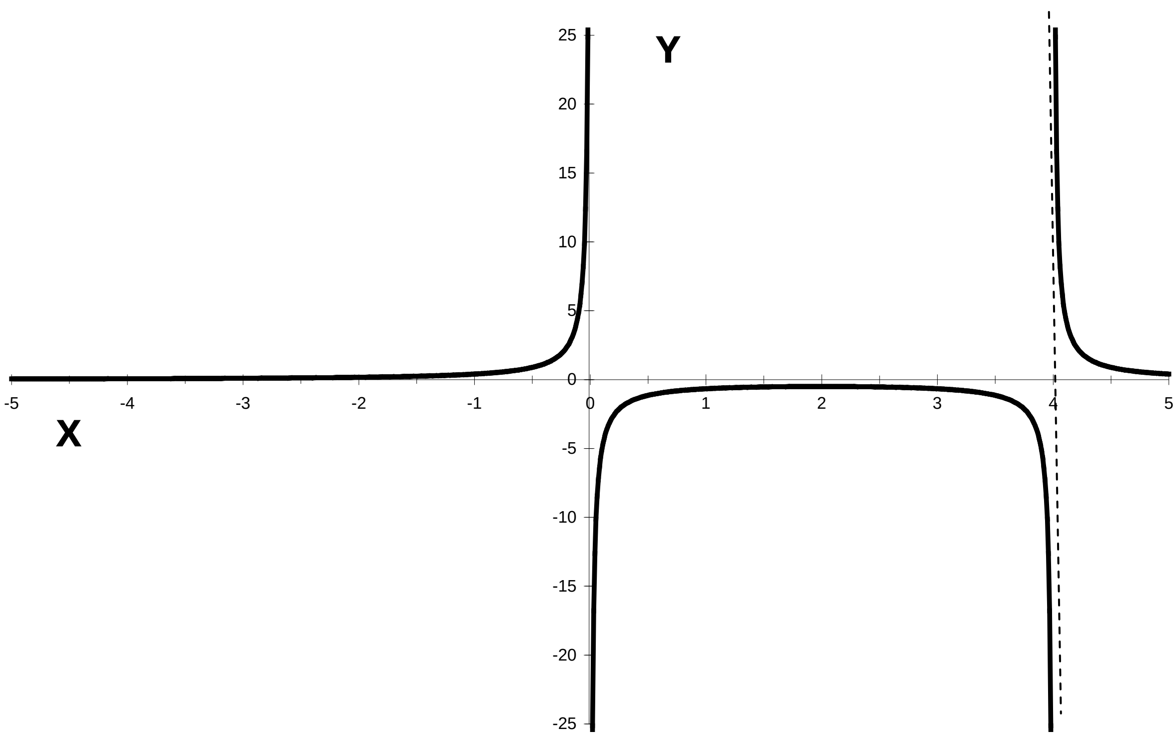
$$f(x)=2\cdot\frac{-(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2}=-4\,\frac{(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow -4\,\frac{(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4<0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x-2>0\Rightarrow x>2 \\ \left(x^2-4x\right)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \end{cases}$$

$-\infty$ $\qquad$ **2** $\qquad$ ∞

- 4 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 2	**(-)**	**(+)**
$(x^2 - 4x)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re\,/\,x<2$ $\qquad$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re\,/\,x>2$



c)

$$I=\int\frac{2}{x^2-4x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-4}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\cdot ln\;x=\frac{1}{2}\cdot ln\;t-\frac{1}{2}\cdot ln\;x=\frac{1}{2}\cdot ln\;\frac{t}{x}=ln\sqrt{\frac{x-4}{x}}+K$$

$$x-4=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\frac{2}{x^2-4x}=\frac{2}{(x-4)x}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x}=\frac{Ax+B(x-4)}{(x-4)x}\Rightarrow Ax+B(x-4)=2\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow A\cdot 0+B(0-4)=2 \\ x=4\Rightarrow A\cdot 4+B(4-4)=2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4B=2\Rightarrow B=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ 4A=2\Rightarrow A=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3.- Considera los vectores $\vec{u}=(a\ ,a\ ,-3), \vec{v}=(1\ ,-1\ ,a)\ y\ \vec{w}=(1\ ,2\ ,3)$

a) **(1 punto)** Determina para que valores del parámetro **a**, los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ son linealmente dependientes

b) **(1 punto)** Para **a = 2**, calcula la ecuación general del plano π que pasa por el punto **P = (1 , 4 , 0)** y cuyos vectores directores son $\vec{u}, \vec{v}$

c) **(1'25 puntos)** Determine el valor del parámetro **a** para que los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ sean ortogonales y calcula el área del rectángulo que tiene por lados estos dos vectores

a)

$$\begin{vmatrix} a & a & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3a + a^2 - 6 - 3 - 2a^2 - 3a = 0 \Rightarrow -a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0 \Rightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

b) Para calcular la ecuación hallaremos el producto vectorial de $\vec{u}, \vec{v}$ que nos da el vector director del plano que es perpendicular al vector formado por P y G, siendo este el punto genérico del plano buscado y por ello el producto escalar de los dos es nulo y la ecuación pedida del plano π

$$\begin{cases} \vec{u} = (2\ ,2\ ,-3) \\ \vec{v} = (1\ ,-1\ ,2) \\ PG = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,4\ ,0) = (x-1\ ,y-4\ ,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4 \cdot (x-1) - 3 \cdot (y-4) - 2z - 2z - 3 \cdot (x-1) - 4 \cdot (y-4) = 0 \Rightarrow (x-1) - 7 \cdot (y-4) - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 7y - 4z + 27 = 0$$

c)

Por ser ortogonales (perpendiculares) el producto escalar de los vectores es nulo

El área del paralelogramo es el módulo del vector resultante del producto vectorial de los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v}.\vec{w} = 0 \Rightarrow (1\ ,-1\ ,a) \cdot (1\ ,2\ ,3) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 3a = 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Superficie rectángulo

$$\begin{cases} \vec{v} = \left(1\ ,-1\ ,\frac{1}{3}\right) \\ \vec{w} = (1\ ,2\ ,3) \end{cases} \Rightarrow S = \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| \Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} - \frac{2}{3}\vec{i} - 3\vec{j} = -\frac{11}{3}\vec{i} - \frac{8}{3}\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$S = \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| = \sqrt{\left(-\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{121}{9} + \frac{64}{9} + 9} = \sqrt{\frac{121 + 64 + 81}{9}} = \frac{\sqrt{266}}{3}\ u^2$$

$$S = \sqrt{16 + 100 + 16} = \sqrt{132} = 2 \cdot \sqrt{33}\ u^2$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ y & 0 & y \\ z & y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Determinar para que valores de **x**, **y** , **z** la matriz **A** no tiene inversa
b) **(1'25 puntos)** Determina para que valores del parámetro **m** el sistema dado por **B.A = C** tiene solución
c) **(1 punto)** Resuelve el sistema anterior para **m = 1**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ y & 0 & y \\ z & y & z \end{vmatrix}=0\Rightarrow xyz+xy^2-y^2-xyz=0\Rightarrow xy^2-y^2=0\Rightarrow (x-1)y^2=0\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1\Rightarrow x=1 \\ z=\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \end{cases} ,\lambda\in\Re$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ y & 0 & y \\ z & y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+2y+mz & 3x+my & 3x+2y+mz \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3+2y+mz=2 \\ 3x+my=0 \\ 3x+2y+mz=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2y+mz=-1 \\ 3x+my=0 \\ 3x+2y+mz=1 \end{cases}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & m \\ 3 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix}=6m-3m^2-6m=-3m^2\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow m=0$$

$$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\{0\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=\text{Número de incognitas}\Rightarrow Sist.Comp.Deter\min ado$$

c)

$$\begin{cases} 2y+z=-1 \\ 3x+y=0 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow -z=-3\Rightarrow z=3\Rightarrow y+3=1\Rightarrow$$

$$y=-2\Rightarrow 3x-2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}\Rightarrow Solución\Rightarrow\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.- Considera la función, $\begin{cases} x^2+ax-1 & si \quad x\le 1 \\ -bx^2+x & si \quad x>1 \end{cases}$

a) **(2 puntos)** Calcular el valor de los parámetros **a** y **b** para que la función sea continua y derivable para todo $x\in\Re$

c) **(1'5 puntos)** Para dichos valores de **a** y **b** determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de **f** y sus extremos relativos

a)

Continuidad

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2+a\cdot 1-1=a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-b\cdot 1^2+1=-b+1 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-b+1 \Rightarrow a+b=1$$

Derivable

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x<1 \\ -2bx+1 & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=2\cdot 1+a=a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-2b\cdot 1+1=-2b+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=a+2=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-2b+1 \Rightarrow a+2b=-1$$

$$\begin{cases} -a-b=-1 \\ a+2b=-1 \end{cases} \Rightarrow b=-2 \Rightarrow a-2=1 \Rightarrow a=3$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x<1 \\ 4x+1 & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3>0 \Rightarrow 2x>-3 \Rightarrow x>-\dfrac{3}{2} \\ 4x+1>0 \Rightarrow 4x>-1 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Crecimiento $\forall x\in\Re \,/\, x>-\dfrac{3}{2}$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re \,/\, x<-\dfrac{3}{2}$

Mínimo relativo en

$$x=-\frac{3}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-1=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-1=\frac{9-18-4}{4}=-\frac{13}{2}$$

(De decrecimiento pasa a crecimiento)

3.- Considera el punto **P = (-1 , -1 , 12)** y el plano π que contiene a los puntos **A = (1 , -1 , 1)**, **B = (1 , 3 , 2)** y **O = (0 , 0 , 0)**

a) **(0'75 puntos)** Calcula la ecuación general del plano π
b) **(0'75 puntos)** Calcula la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto **P** y es perpendicular al plano π
c) **(1'75 puntos)** Halla el punto **C** dado por la intersección de la recta **r** con el plano π y calcula el área del triángulo de vértices **A**, **B** y **C**

a) Para calcular el plano π hallaremos los vectores **OA**, **OB** y **OG** siendo **G** el punto genérico del plano buscado. Estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) por lo tanto uno es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forma es nula y la ecuación buscada.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1,-1,\ 1) - (0,0,\ 0) = (1,-1,\ 1) \\ \overrightarrow{OB} = (1,3,\ 2) - (0,0,\ 0) = (1,3,\ 2) \\ \overrightarrow{OG} = (x,y,\ z) - (0,0,\ 0) = (x,y,\ z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y + 3z + z - 3x - 2y = 0 \Rightarrow$$

$$-5x - y + 4z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 5x + y - 4z = 0$$

b) El vector director de la recta es el mismo que el del plano π, y además pasa por el punto **P**

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (5,1,\ -4) \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-12}{-4}$$

c) Para hallar el punto **C** de intersección de la recta **r** con el plano π verificaremos los puntos de la recta la ecuación del plano

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 12 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow 5 \cdot (-1 + 5\lambda) + (-1 + \lambda) - 4 \cdot (12 - 4\lambda) = 0 \Rightarrow -5 + 25\lambda - 1 + \lambda - 48 + 16\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-54 + 42\lambda = 0 \Rightarrow 42\lambda = 54 \Rightarrow \lambda = \frac{54}{42} = \frac{9}{7} \Rightarrow C \begin{cases} x = -1 + 5 \cdot \frac{9}{7} = \frac{38}{7} \\ y = -1 + \frac{9}{7} = \frac{2}{7} \\ z = 12 - 4 \cdot \frac{9}{7} = \frac{48}{7} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{38}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{48}{7}\right)$$

Para hallar el área del triángulo **ABC**, calcularemos el producto vectorial de los vectores **AB** y **AC** siendo el valor buscado la mitad del módulo del vector hallado en ese producto vectorial.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,3,\ 2) - (1,-1,\ 1) = (0,4,\ 1) \\ \overrightarrow{AC} = \left(\frac{38}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{48}{7}\right) - (1,-1,\ 1) = \left(\frac{31}{7},\ \frac{9}{7},\ \frac{41}{7}\right) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{31}{7} & \frac{9}{7} & \frac{41}{7} \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \frac{164}{7}\vec{i} + \frac{31}{7}\vec{j} - \frac{124}{7}\vec{k} - \frac{9}{7}\vec{i} = \frac{155}{7}\vec{i} + \frac{31}{7}\vec{j} - \frac{124}{7}\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(\frac{155}{7}\right)^2 + \left(\frac{31}{7}\right)^2 + \left(-\frac{124}{7}\right)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\frac{24025}{49} + \frac{961}{49} + \frac{15376}{49}} = \frac{\sqrt{40362}}{7} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{40362}}{7} = \frac{\sqrt{40362}}{14}\ u^2$$