## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

**1.- (3'25 puntos)** Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+ay+3z=1 \\ x+y+(2-a)z=a \end{cases} \quad , \quad a\in\Re$$

Estúdialo para los distintos del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}=a\,(2-a)+3+2-2a-3-(2-a)=2a-a^2-2a+a=-a^2+a \Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow$$

$$-a^2+a=0\Rightarrow a\,(-a+1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ -a+1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall a\in\Re-\{0\,,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Num.\,incognitas\Rightarrow Sist.\,Comp.\,Determinado$$

$$Soluciones\ \ para\ el\ Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & a \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \end{array}\right)\Rightarrow -az=a\Rightarrow z=\frac{a}{-a}=-1\Rightarrow (a-1)\,y+(-1)=1\Rightarrow (a-1)\,y=2\Rightarrow$$

$$y=\frac{2}{a-1}\Rightarrow x+\frac{2}{a-1}+2\cdot(-1)=0\Rightarrow x=2-\frac{2}{a-1}=\frac{2a-2-2}{a-1}=\frac{2a-4}{a-1}=2\frac{a-2}{a-1}$$

$$(Para\ todo)\forall m\in\Re-\{1\}\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(2\frac{a-2}{a-1}\,,\,\frac{2}{a-1}\,,\,-1\right)$$

$$Si\ a=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Numero\ de\ incognitas\Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado\Rightarrow -y+z=1\Rightarrow y=-1+z\Rightarrow x+(-1+z)+2z=0\Rightarrow$$

$$x+3z-1=0\Rightarrow x=1-3z\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1-3\lambda\,,\,-1+\lambda\,,\,\lambda)$$

$$Si\ a=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ 0z=2\Rightarrow z=\dfrac{2}{0}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow \end{cases}$$

$$Sistema\ Incompatible$$

**2.-** Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) **(1'75 puntos)** Encuentra los valores de **a**, **b** y **c** de forma que la gráfica de la función **f** pase por el punto **(0 , 1)** y las rectas tangentes a la gráfica de **f** en los puntos de abscisas **x = 0** y **x = 1** sean ambas paralelas a la recta **y = 3x + 5**

b) **(1'75 puntos)** Para **a > 0**, **b = 0** y **c = 0,** determina la función **f** tal que el área de la región limitada por su gráfica, el eje **OX** (recta **y = 0**) y las rectas **x = 0** y **x = 1** sea igual a **3** unidades de superficie

$a)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \\ f'(0) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 3 \Rightarrow b = 3 \\ f'(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$$

$b)$

$$\frac{1}{2} \in (0\,,1) f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{a}{4} = \frac{1+2a}{8} \Rightarrow Como\ a > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\int_0^1 \left(x^3 + ax^2\right) dx = 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_0^1 + a \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \left(1^4 - 0^4\right) + \frac{a}{3} \cdot \left(1^3 - 0^3\right) = 3 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{a}{3} = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3} = 3 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{11}{4} \Rightarrow a = \frac{33}{4} \Rightarrow f(x) = x^3 + \frac{33}{4}x^2$$

**3.-** Considera el punto P(1 , 0 , 4) y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 0$

a) **(0'75 puntos)** Calcula la ecuación de la recta **r** perpendicular al plano $\pi$ y que pasa por el punto **P**

b) **(1'5 puntos)** Determinar el punto **Q** simétrico del punto **P** respecto al plano $\pi$

c) **(1 punto)** Calcula la distancia del punto **Q** al plano $\pi$

a) El vector director de la recta r, al ser perpendicular al plano $\pi$, es el del plano, y además la recta que da determinada por el punto

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (2\,, -1\,, 3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

**Continuación del Problema 3 de la Opción del Examen nº 1**

b) El punto **M** intersección de la recta anterior y el plano $\pi$ es el punto medio entre **P** y su simétrico **Q**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2\,(1+2\lambda) - (-\lambda) + 3\,(4+3\lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 12 + 9\lambda = 0 \Rightarrow 14 + 14\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$14\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow M \begin{cases} x = 1 + 2\cdot(-1) \\ y = -(-1) \\ z = 4 + 3\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow M(-1\,,1\,,1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = \dfrac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q + 1 = -2 \\ 1 = \dfrac{0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \\ 1 = \dfrac{4 + z_Q}{2} \Rightarrow z_Q + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q(-3\,,2\,,-2)$$

$c)$

$$d(Q\,,\pi) = \frac{|2\cdot(-3) - 2 + 3\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|-6-2-6|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\ u$$

## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

**1.-** Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad donde\ a,b\in\Re$

a) **(0'5 puntos)** Determina para que valores de **a** y **b** la matriz **A** es regular (inversible)

b) **(1'25 puntos)** Determina para que valores de **a** y **b** se cumple **A = A$^{-1}$**
c) **(1'5 puntos)** Para **a = 2** y **b = 2,** determina las matrices **C** que verifican **AC = BC**

a) La condición necesaria y suficiente para que sea regular es que el determinante de la matriz no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{vmatrix}=ab\Rightarrow ab\neq 0$$

$b)$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}ab & -ab & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ab}\cdot\begin{pmatrix}ab & -ab & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ a=\frac{1}{a}\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow No\ sol\\ a=-1\end{cases}\\ b=\frac{1}{b}\Rightarrow b^2=1\Rightarrow b=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ b=-1\end{cases}\end{cases}$$

$c)$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=,\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2y\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4y-z\\ 4x-2y\\ 2y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=4y-z\\ 2y=4x-2y\\ 2z=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+z=0\\ x-y=0\\ y-z=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (C)=2<Numero\ de\ incognitas$$

$$Al\ ser\ un\ sistema\ \text{hom}og\acute{e}neo\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado\Rightarrow y-z=0\Rightarrow y=z\Rightarrow$$

$$x-2z+z=0\Rightarrow x=z\Rightarrow Soluci\acute{o}n\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$$

**2.-**
a) **(2'25 puntos)** De entre todos los números reales positivos **x**, **y** que suman **15**, encuentra aquellos para los que el producto $\mathbf{x^2y}$ es máximo

b) **(1'25 puntos)** Determina si la función $f(x)=|x|-x$ es derivable en **x = 0**

$a)$

$$\begin{cases} x+y=15 \Rightarrow y=15-x \\ P=x^2y \end{cases} \Rightarrow P=x^2(15-x)=15x^2-x^3 \Rightarrow P'=\frac{dP}{dx}=30x-3x^2=3x(10-x) \Rightarrow$$

$$Si\ P'=0 \Rightarrow 3x(10-x)=0 \Rightarrow x(10-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 10-x=0 \Rightarrow x=10 \end{cases} \Rightarrow P''=\frac{d^2P}{dx^2}=30-6x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P''(0)=30-6\cdot 0=30>0 \Rightarrow Mínimo \\ P''(10)=30-6\cdot 10=-30<0 \Rightarrow Máximo \end{cases} \Rightarrow Solución \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=15-10=5 \end{cases}$$

$b)$

$$x>0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x-x & si \quad x<0 \\ x-x & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0 \end{cases} \Rightarrow Como \lim_{x\to 0^-} f'(x)=-2 \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0 \Rightarrow La\ \ función\ es\ no\ derivable\ en\ x=0$$

**3.-** Sean **A**, **B** y **C** los puntos de intersección del plano **2x + y – 4z - 4 = 0** con los tres ejes coordenados **OX**, **OY** y **OZ** respectivamente. Calcula:
a) **(1'25 puntos)** El área del triángulo **ABC**
b) **(1 punto)** El perímetro del triángulo **ABC**
c) **(1 punto)** Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo **ABC**

$a)$

$$Ecuación\ eje\ OX \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \Rightarrow Inters.\ A \Rightarrow 2\lambda+0-4\cdot 0-4=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow A \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \Rightarrow A(2\ ,0\ ,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$Ecuación\ eje\ OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow Inters.\ B \Rightarrow 2\cdot 0+\mu-4\cdot 0-4=0 \Rightarrow \mu=4 \Rightarrow B \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=4 \Rightarrow B(0\ ,4\ ,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$Ecuación\ eje\ OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow Inters.\ B \Rightarrow 2\cdot 0+0-4\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow C \\ z=\alpha \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow C(0\ ,0\ ,-1) \\ z=-1 \end{cases}$$

El área del triangulo es igual a la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0\ ,4\ ,0)-(2\ ,0\ ,0)=(-2\ ,4\ ,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0\ ,0\ ,-1)-(2\ ,0\ ,0)=(-2\ ,0\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{k}-2\vec{j}$$

**Continuación del Problema 3 de la Opción del Examen nº 2**

$a)$*Continuación*

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+8^2+(-2)^2}=\sqrt{16+64+4}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}\Rightarrow$$

$$Área=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{21}=\sqrt{21}\ u^2$$

b) El perímetro es la suma de los módulos de los vectores **AB**, **AC** y **BC**

$$\left\{\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(-2\ ,\ 4\ ,\ 0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\\ \overrightarrow{AC}=(-2\ ,\ 0\ ,\ -1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\\ \overrightarrow{BC}=(0\ ,\ 0\ ,\ -1)-(0\ ,\ 4\ ,\ 0)=(0\ ,\ -4\ ,\ -1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$Perímetro=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{17}=\left(3\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)u$$

$c)$

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2\ ,\ 4\ ,\ 0)\equiv(1\ ,\ -2\ ,\ 0)\Rightarrow r_{AB}\equiv x-2=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{0}\\ \overrightarrow{AC}=(-2\ ,\ 0\ ,\ -1)\equiv(2\ ,\ 0\ ,\ 1)\Rightarrow r_{AC}\equiv\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{0}=z\\ \overrightarrow{BC}=(0\ ,\ -4\ ,\ -1)\equiv(0\ ,\ 4\ ,\ 1)\Rightarrow r_{BC}\equiv\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-4}{4}=z\end{array}\right.$$