OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1.- Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & m^2\\ m & m & m^2\end{pmatrix}$ con $m\in\Re$

a) **(1 punto)** Halla para que valores del parámetro **m** la matriz **A** es regular (inversible)

b) **(1'5 puntos)** Estudia para que valores del parámetro **m** el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ tiene solución

c) **(0'75 puntos)** Para **m = 1**, calcula las soluciones del sistema dado en el apartado anterior

a)

Para que una matriz tenga inversa su determinante no debe de ser nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & m^2 & m^2\\ m & m & m^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m^2-m & m^2-m\\ 0 & 0 & m^2-m\end{vmatrix}=1\cdot\left(m^2-m\right)\cdot\left(m^2-m\right)=\left(m^2-m\right)^2=\left[m\,(m-1)\right]^2$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow\left[m\,(m-1)\right]^2=0\Rightarrow m\,(m-1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m-1=0\Rightarrow m=1\end{cases}$$

$$\forall m\in\Re-\{0\,,1\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$b)$

$$A^{-1}A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow I\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & m & m\\ 1 & m^2 & m\\ 1 & m^2 & m^2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}m^4-m^3 & -\left(m^2-m\right) & 0\\ 0 & m^2-m & -\left(m^2-m\right)\\ m^2-m^3 & 0 & m^2-m\end{pmatrix}$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix}(m-1)m^3 & -m(m-1) & 0\\ 0 & m(m-1) & -m(m-1)\\ -(m-1)m^2 & 0 & m(m-1)\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\left[m\,(m-1)\right]^2}\cdot\begin{pmatrix}(m-1)m^3 & -m(m-1) & 0\\ 0 & m(m-1) & -m(m-1)\\ -(m-1)m^2 & 0 & m(m-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{m}{m-1} & -\frac{1}{m(m-1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{m(m-1)} & -\frac{1}{m(m-1)}\\ -\frac{1}{m-1} & 0 & \frac{1}{m(m-1)}\end{pmatrix}$$

b) Continuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m-1} & -\frac{1}{m(m-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m(m-1)} & -\frac{1}{m(m-1)} \\ -\frac{1}{m-1} & 0 & \frac{1}{m(m-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m-1} - \frac{1}{m(m-1)} \\ \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m(m-1)} \\ -\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m(m-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^2-1}{m(m-1)} \\ 0 \\ \frac{m-1}{m(m-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(m+1)(m-1)}{m(m-1)} \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m+1}{m} \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Solución \ para \ todo \ m \in \Re - \{0 , 1\} \Rightarrow Siempre \ que \ exista \ A^{-1}$$

c) Para m = 1 no existe matriz inversa, no pudiéndose resolver por el método visto en el apartado anterior

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (C) = rang\ (C/D) = 1 < Número \ de \ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema \ compatible \ indeterminado \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow$$
$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1 - \lambda - \mu\ ,\ \lambda\ ,\ \mu)$$

2.- Considera la función: $f(x) = |x^2 - 1|$

a) **(1'25 puntos)** Estudia la derivabilidad de la función **f**
b) **(1'25 puntos)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función **f.** Dibuja su gráfica
b) **(1 punto)** Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función **f**, el eje de abscisas **(y = 0)** y las rectas verticales **x = -1** y **x = 1**

a)

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < -1 \\ -2x & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación Problema 2 de la Opción del Examen nº 1

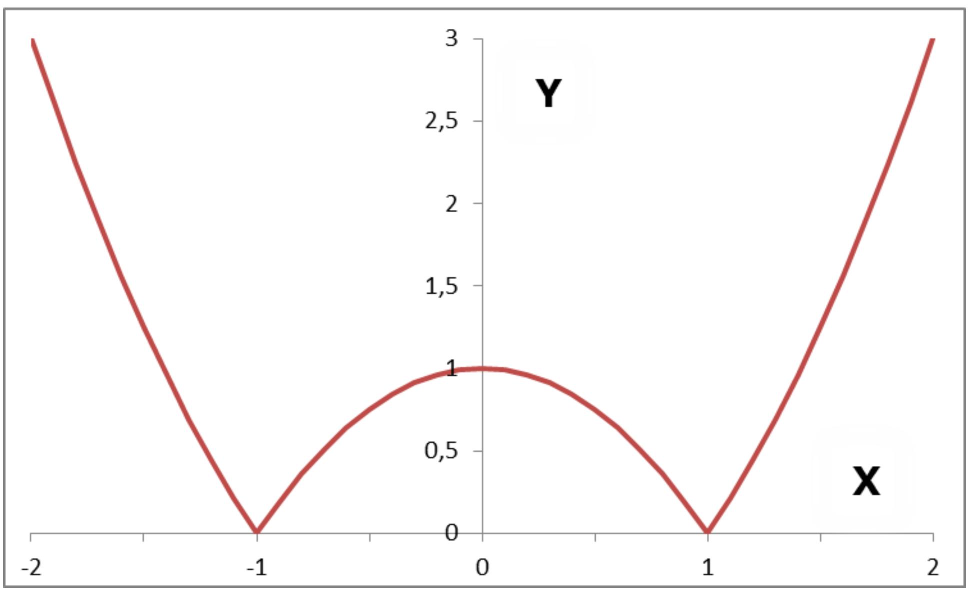
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=2\cdot(-1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=-2\cdot(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=-2\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=2 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-2\cdot 1=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=2\cdot 1=2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-2\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=2 \end{cases}$$

La función no es derivable en **x = -1** y en **x = 1**

b)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1 \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$Creciente\ si \begin{cases} 2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow No\ pertenece\ a\ (-\infty,-1) \Rightarrow Decreciente \\ -2x>0 \Rightarrow \begin{cases} -2<0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \forall x\in\Re\,/\,x<0 \Rightarrow \begin{cases} Creciente \Rightarrow (-1,0) \\ Decreciente \Rightarrow (0,1) \end{cases} \\ 2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow Pertenece\ a\ (1,\infty) \Rightarrow Creciente \end{cases}$$



c)

Hay simetria

$$A=2\int_0^1\left(-x^2+1\right)dx=-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+2\cdot[x]_0^1=-\frac{2}{3}\left(1^3-0^3\right)+2\cdot(1-0)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}u^2$$

3.- Considera los puntos $A=(1\,,1\,,-1),\ B=(0\,,3\,,1)\ y\ C=(2\,,m-2\,,-3)$

a) **(1'25 puntos)** Determina para que valor del parámetro **m** los tres puntos **A**, **B** y **C** están alineados y calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que los contiene
b) **(1'25 puntos)** Determina los valores del parámetro **m** para los que el área del triángulo de vértice **A**, **B**, **C** es igual a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades de superficie
c) **(0'75 puntos)** Para **m = 0**, calcula la ecuación general del plano que contiene a los puntos **A**, **B** y **C**

a) Si los puntos están alineados los vectores **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0\,,3\,,1)-(1\,,1\,,-1)=(-1\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{AC}=(2\,,m-2\,,-3)-(1\,,1\,,-1)=(1\,,m-3\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}=\frac{2}{m-3} \Rightarrow \frac{-1}{1}=\frac{2}{m-3} \Rightarrow 2=-m+3 \Rightarrow$$
$$m=1 \Rightarrow$$

$$\text{Re}cta\ que\ contiene\ a\ los\ puntos\ A,\ B\ y\ C \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$$

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**
$$A=(1\,,1\,,-1),\ B=(0\,,3\,,1)\ y\ C=(2\,,m-2\,,-3)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0\,,3\,,1)-(1\,,1\,,-1)=(-1\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{AC}=(1\,,1-3\,,-2)=(-1\,,-2\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}+2\vec{k}+4\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\vec{j}+4\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$Área=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\ u^2$$

c) Para determinar el plano π, este se halla gracias a los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios este ultimo es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-1\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{AC}=(2\,,0-2\,,1)-(1\,,1\,,-1)=(1\,,-3\,,2) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,-1)=(x-1\,,y-1\,,z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$
$$4\,(x-1)+2\,(y-1)+3\,(z+1)-2\,(z+1)+6\,(x-1)+2\,(y-1)=0 \Rightarrow 10\,(x-1)+4\,(y-1)+(z+1)=0 \Rightarrow$$
$$\pi \equiv 10x+4y+z-13=0$$

1.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) **(2'25 puntos)** Determinar la matriz **A** que verifica: **det (A) = 7** y **A . B = C**
b) **(1 punto)** Sean **A**, **B**, **C** las matrices dadas arriba y que verifican las condiciones del apartado anterior. Decide cual de las igualdades siguientes se cumple. Justifica la respuesta
(b.1) A = C . B^{-1} **(b.2) B = A^{-1} . C** **(b.3) A^{-1} = B . C^{-1}**

$a)$

$$\begin{cases} |A|=\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix}=7 \Rightarrow xz-y^2=7 \\ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x-y & 6x-3y \\ 2y-z & 6y-3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xz-y^2=7 \\ 2x-y=-4 \\ 6x-3y=-12 \Rightarrow 2x-y=-4 \\ 2y-z=1 \\ 6y-3z=3 \Rightarrow 2y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xz-y^2=7 \\ 2x-y=-4 \\ 2y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y-4 \Rightarrow x=\dfrac{y-4}{2} \\ z=2y-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y-4}{2}\right)\cdot(2y-1)-y^2=7 \Rightarrow \frac{(y-4)\cdot(2y-1)-2y^2}{2}=7 \Rightarrow 2y^2-y-8y+4-2y^2=14 \Rightarrow$$

$$-9y+4=14 \Rightarrow -9y=10 \Rightarrow y=-\frac{10}{9} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-\frac{10}{9}-4}{2}=\dfrac{\frac{-10-36}{9}}{2}=-\dfrac{46}{18}=-\dfrac{23}{9} \\ z=2\cdot\left(-\dfrac{10}{9}\right)-1=-\dfrac{20}{9}-1=-\dfrac{29}{9} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{23}{9} & -\frac{10}{9} \\ -\frac{10}{9} & -\frac{29}{9} \end{pmatrix}$$

b) La única igualdad que se puede cumplir es la **b.2** ya que en los otros casos no existe ni **B^{-1}** ni **C^{-1}** ya que los determinantes de las matrices **B** y C son nulos. Por lo tanto la única solución posible es la citada ya que existe A^{-1} al no ser nulo el determinante de la matriz A.

2.- a) Considera la función, $g(x)=\dfrac{ax^2+b}{x-1}$ definida para $x\neq 1$

a.1) **(1'25 puntos)** Calcular los valores de **a** y **b** para que la gráfica de **g** pase por el punto **(2 , 2)** y tenga una asíntota oblicua de pendiente **1**

a.2) **(1'25 puntos)** Para **a = 1** y **b = 1,** calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de **g** en el punto de abcisa **x = -1**

b) (1 punto) Determina si la función $f(x)=x\,|x|$ es derivable en **x = 0**

$a.1)$

$$\begin{cases} g(2)=2\Rightarrow \dfrac{a\cdot 2^2+b}{2-1}=2\Rightarrow \dfrac{4a+b}{1}=2\Rightarrow 4a+b=2 \\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}\Rightarrow 1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+b}{x^2-x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a\frac{x^2}{x^2}+\frac{b}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=a\Rightarrow a=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$4\cdot 1+b=2\Rightarrow b=-2\Rightarrow g(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$$

$a.2)$

$$g(x)=\frac{x^2+1}{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{2x\,(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} g(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{(-1)-1}=\dfrac{2}{-2}=-1 \\ g'(-1)=\dfrac{(-1)^2-2\cdot(-1)-1}{[(-1)-1]^2}=\dfrac{1+2-1}{(-2)^2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow Ecuación\ \tan gente\Rightarrow y+1=\frac{1}{2}\cdot(x+1)\Rightarrow$$

$$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-1\Rightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{x-1}{2}\Rightarrow 2y=x-1\Rightarrow x-2y-1=0$$

$b)$

$$x>0\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x\cdot(-x) & si\quad x<0 \\ x\cdot x & si\quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^2 & si\quad x<0 \\ x^2 & si\quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x & si\quad x<0 \\ 2x & si\quad x>0\end{cases}\Rightarrow \text{La}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-2\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0=0 \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$

función **f(x)** es derivable en **x = 0** y por ello en todo **x** real

3.- Considera la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

a) **(1'25 puntos)** Determina la ecuación de la recta **s** que corta perpendicularmente a la recta **r** y que pase por el punto **P = (0 , 2 , 2)**,
b) **(0'75 puntos)** Halla el punto **Q** dado por la intersección de las rectas **r** y **s**
c) **(1'25 puntos)** Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las rectas **r** y **s**, y la ecuación de la recta $\mathbf{r_1}$ perpendicular al plano π y que pasa por el punto **Q**

a) El vector director de la recta **s** es el formado por el punto **P** y el punto general **R** de la recta **r** que es perpendicular al vector director de esta recta y por ello el producto escalar de ambos vectores es nulo

$$y = 1 - x \Rightarrow 3x + 2(1 - x) - z = 1 \Rightarrow z = 3x + 2 - 2x - 1 \Rightarrow z = 1 + x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \Rightarrow \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (\lambda , 1 - \lambda , 1 + \lambda) - (0 , 2 , 2) = (\lambda , -1 - \lambda , -1 + \lambda) \\ \overrightarrow{v_r} = (1 , -1 , 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda , -1 - \lambda , -1 + \lambda) \cdot (1 , -1 , 1) = 0 \Rightarrow \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PR} = (0 , -1 - 0 , -1 + 0) = (0 , -1 , -1) \equiv (0 , 1 , 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

$b)$

$$Q \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - 0 \Rightarrow Q(0 , 1 , 1) \\ z = 1 + 0 \end{cases}$$

c) Para hallar el plano π tenemos que contar con los vectores directores de ambas rectas y por el vector **QG** siendo **G** el punto genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **QG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

El vector director de la recta $\mathbf{r_1}$ es el mismo que el del plano π, y además pasa por el punto **Q**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1 , -1 , 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (0 , 1 , 1) \equiv \\ QG = (x , y , z) - (0 , 1 , 1) = (x , y - 1 , z - 1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + z - 1 - x - y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x + y - z = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_{r_1}} = \overrightarrow{v_\pi} = (2 , 1 , -1) \Rightarrow r_1 \equiv \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z - 1}{-1}$$