OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1. [3,25 PUNTOS] Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y + az = -1 \\ -x + ay - z = 2 \\ 2ax - 2y + a^2 z = 2 \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Estúdialo para los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-a & a^2+1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 2a-a^2 & a^3-2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2-a & a^2+1 \\ a(2-a) & a^3-2 \end{vmatrix} = (2-a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2+1 \\ a & a^3-2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = (2-a)\cdot(a^3 - 2 - a^3 - a) = (2-a)\cdot(-2-a) = -(2-a)\cdot(2+a) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (2-a)\cdot(2+a) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Num.\ incognitas \Rightarrow Siste.\ Compatible\ Determinado$$

Soluciones para el Sistema Compatible Determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & a+2 & -1+2a \\ 0 & 0 & a^2+2a \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{(-1)\begin{vmatrix} a+2 & 2a-1 \\ 0 & a(a+2) \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{-a(a+2)^2}{(a-2)\cdot(2+a)} = -\frac{a(a+2)}{(a-2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 3 & 0 & -1+2a \\ 2a+4 & 0 & a^2+2a \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2a-1 \\ 2(a+2) & a(a+2) \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{(a+2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2a-1 \\ 2 & a \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)}$$

$$y = \frac{3a-4a+2}{a-2} = \frac{-a+2}{a-2} = -\frac{a-2}{a-2} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & a+2 & 0 \\ 2a+4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & a+2 \\ 2(a+2) & 0 \end{vmatrix}}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{2(a+2)^2}{(a-2)\cdot(2+a)} = \frac{2(a+2)}{a-2}$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{a(a+2)}{(a-2)}, -1, \frac{2(a+2)}{a-2}\right)$$

Continuación del Problema 1 de la Opción de Examen 1

$Si\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -8 & -10 & 0 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rang(A)=rang(A/B)=2<Num.\,incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 4x+5y=-5 \Rightarrow 4x=-5-5y \Rightarrow x=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}y \Rightarrow -\frac{5}{4}-\frac{5}{4}y-2y-z=2$$

$$z=\frac{5}{4}-2+\frac{5}{4}y-2y=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}y \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(-\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\lambda\,,\,\lambda\,,\,-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\lambda\right)$$

$Si\ a=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -30 & 0 & -50 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rang(A)=2 \neq rang(A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$

2.

a) [2 PUNTOS] De entre todos los rectángulos de perímetro 16 cm., determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcula la longitud de dicha diagonal.

b) [1,5 PUNTOS] Calcula el valor de $a \in \mathbf{R}$, $a>0$, para que el área de la región plana encerrada entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=a$ sea igual a $\frac{4}{3}$ unidades de superficie.

a) Sea ***B*** la base y ***H*** la altura del rectángulo

$$\begin{cases} 16=2B+2H \Rightarrow B+H=8 \Rightarrow B=8-H \\ D=\sqrt{B^2+H^2} \end{cases} \Rightarrow D=\sqrt{(8-H)^2+H^2}=\sqrt{64-16H+H^2+H^2} \Rightarrow$$

$$D'=\frac{dD}{dH}=\frac{1}{2\sqrt{64-16H+2H^2}}(4H-16)=\frac{2H-8}{\sqrt{64-16H+2H^2}}=\frac{2\,(H-4)}{\sqrt{64-16H+2H^2}} \Rightarrow D'=0 \Rightarrow$$

$$2\,(H-4)=0 \Rightarrow H-4=0 \Rightarrow H=4 \Rightarrow D''=\frac{d^2D}{dH^2}=2\frac{\sqrt{64-16H+2H^2}-\frac{2H-8}{2\sqrt{64-16H+2H^2}}(H-4)}{64-16H+2H^2}$$

$$D''=\frac{d^2D}{dH^2}=2\frac{64-16H+2H^2-(H-4)^2}{\left(64-16H+2H^2\right)\sqrt{64-16H+2H^2}}=2\frac{64-16H+2H^2-H^2+8H-16}{\left(64-16H+2H^2\right)\sqrt{64-16H+2H^2}}$$

$$D''=2\frac{48-8H+H^2}{\left(64-16H+2H^2\right)\sqrt{64-16H+2H^2}} \Rightarrow D''(4)=2\frac{48-8\cdot 4+4^2}{\left(64-16\cdot 4+2\cdot 4^2\right)\sqrt{64-16\cdot 4+2\cdot 4^2}}$$

Continuación del Problema 2 de la Opción de Examen 1

$a)$ *Continuación*

$$D''(4)=2\frac{64-32}{(64-64+32)\sqrt{64-64+32}}=2\frac{32}{32\sqrt{32}}=\frac{2}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}>0\Rightarrow \textit{Mínimo}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} H=4\ cm. \\ B=8-4=4\ cm. \end{cases}\Rightarrow D=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ cm.$$

b)

$$\textit{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ a\neq 0\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow \textit{No hay puntos de corte} \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte entre funciones}\Rightarrow x^2=a\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}\Rightarrow\begin{cases} x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases}\Rightarrow$$

Son simetricas, respecto a OY las dos funciones

$$\frac{4}{3}=2\int_0^{\sqrt{a}} a\,dx-2\int_0^{\sqrt{a}} x^2\,dx\Rightarrow\frac{4}{3}=2a\,[x]_0^{\sqrt{a}}-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{\sqrt{a}}\Rightarrow\frac{4}{3}=2a\left(\sqrt{a}-0\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{a^3}-0\right)\Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}=2a\sqrt{a}-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{4}{3}a\sqrt{a}\Rightarrow a\sqrt{a}=1\Rightarrow a^2\left(\sqrt{a}\right)^2=1^2\Rightarrow a^3=1\Rightarrow a=\sqrt[3]{1}=1$$

3. Los puntos $A=(1,3,1)$ y $B=(2,1,3)$ son dos vértices consecutivos de un cuadrado. Los otros dos vértices del cuadrado pertenecen a una recta r que pasa por el punto $P=(2,7,0)$.

a) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de la recta r.

b) [1 PUNTO] Determina la ecuación general del plano π que contiene al cuadrado.

c) [1,25 PUNTOS] Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

a) La recta **r** tiene que ser paralela a la determinada por **A** y **B,** siendo sus vectores directores iguales

$$\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(2,1,3)-(1,3,1)=(1,-2,2)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=7-2\lambda\\ z=0+2\lambda\end{cases}$$

b) Al pertenecer los vértices **C** y **D** a la recta **r** están alineados con el punto P que determina el plano que contiene al cuadrado. Por lo tanto conocido AB, AP y AG, siendo G el punto generador del plano al ser coplanarios el determinante de la matriz, que determina su producto mixto, es nulo y la ecuación del plano π

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)\\ \overrightarrow{AP}=(2,7,0)-(1,3,1)=(1,4,-1)\\ \overrightarrow{AG}=(x,y,z)-(1,3,1)=(x-1,y-3,z-1)\end{cases}\Rightarrow\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\cdot\overrightarrow{AG}\right|=\begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z-1\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$8(x-1)-(y-3)-2(z-1)-4(z-1)-2(x-1)-2(y-3)=0\Rightarrow 6(x-1)-3(y-3)-6(z-1)=0\Rightarrow$$
$$2(x-1)-(y-3)-2(z-1)=0\Rightarrow\pi\equiv 2x-y-2z+3=0$$

c) La recta **r** es paralela a la determinada por **A** y **B**, y los vectores **BC** y **AD**, siendo **C** y **D** los vértices consecutivos buscados, son perpendiculares a la recta que une **A** y **B,** que tiene como vector director el que pertenece a **r,** y por ello los productos escalares de dichos vectores y el **AB** son, ambos, nulos

$$Los\ puntos\ C\ y\ D\ quedan\ \det er\min ados\ por\ la\ ecuación\ parámetica\ de\ r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=7-2\lambda\\ z=0+2\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{v_r}=(1,-2,2)\\ \overrightarrow{BC}=(2+\lambda_C,7-2\lambda_C,2\lambda_C)-(2,1,3)=(\lambda_C,6-2\lambda_C,2\lambda_C-3)\\ \overrightarrow{AD}=(2+\lambda_D,7-2\lambda_D,2\lambda_D)-(1,3,1)=(1+\lambda_D,4-2\lambda_D,2\lambda_D-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_r}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\vec{v_r}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{v_r}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\vec{v_r}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(1,-2,2)\cdot(\lambda_C,6-2\lambda_C,2\lambda_C-3)=0\Rightarrow\lambda_C-12+4\lambda_C+4\lambda_C-6=0\Rightarrow 9\lambda_C-18=0\Rightarrow\lambda_C=2\\ (1,-2,2)\cdot(1+\lambda_D,4-2\lambda_D,2\lambda_D-1)=0\Rightarrow 1+\lambda_D-8+4\lambda_D+4\lambda_D-2=0\Rightarrow 9\lambda_D-9=0\Rightarrow\lambda_C=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}C\begin{cases}x=2+2\\ y=7-2\cdot 2\Rightarrow C(4,3,4)\\ z=0+2\cdot 2\end{cases}\\ D\begin{cases}x=2+1\\ y=7-2\cdot 1\Rightarrow D(3,5,2)\\ z=0+2\cdot 1\end{cases}\end{cases}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1.

a) [2 PUNTOS] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $A + B = A \cdot B$.

b) [1,25 PUNTOS] Sea M una matriz cuadrada tal que $\det(M) = -1$ y $\det((-2)M) = 8$. Calcula el tamaño de la matriz M.

a)

$$\text{Siendo } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b-1 \\ c+2 & d+1 \end{pmatrix} \\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & b-1 \\ c+2 & d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+1 = a-c \Rightarrow c = -1 \\ b-1 = b-d \Rightarrow d = 1 \\ c+2 = 2a+c \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ d+1 = 2b+d \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Siendo n el orden o tamaño de la matriz cuadrada

$$\det[(-2M)] = (-2)^n \cdot \det(M) = (-2)^n \cdot |M| = (-2)^n \cdot (-1) = 8 \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow 2^n = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

2.

a) [1,5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$. Halla los valores de a, b y c para que la gráfica de la función f tenga como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en $(0,1)$.

b) [1 PUNTO] Estudia si la función $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

c) [1 PUNTO] ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de grado cuatro?

a)

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{a\frac{x^2}{x^2} + b\frac{x}{x^2} + \frac{c}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{a + \frac{b}{\infty} + \frac{c}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{a+0+0}{1-0} = a \Rightarrow$$

Como $y = -1 \Rightarrow a = -1$

Continuación Problema 2 de la Opción de Examen 2

$a)$ *Continuación*

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4)-2x(ax^2+bx+c)}{(x^2-4)^2}=\frac{2ax^3+8ax+bx^2-4b-2ax^3-2bx^2-2cx}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-bx^2+(8a-2c)x-4b}{(x^2-4)^2}\Rightarrow con\ a=-1\Rightarrow f'(x)=\frac{-bx^2-(8+2c)x-4b}{(x^2-4)^2}$$

b)

$$\begin{cases} f(0)=1\Rightarrow \dfrac{-0^2+b\cdot 0+c}{0^2-4}=1\Rightarrow -\dfrac{c}{4}=1\Rightarrow c=-4 \quad (recuerda\ que\ a=-1) \\ f'(0)=0\Rightarrow \dfrac{-b\cdot 0^2-[8+2(-4)]\cdot 0-4b}{(0^2-4)^2}=0\Rightarrow \dfrac{-4b}{16}=0\Rightarrow -4b=0\Rightarrow b=0 \end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{-x^2-4}{x^2-4}$$

$$f(x)=-\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

Para que una función sea derivable inicialmente tiene que ser continua, cumpliendo las igualdades de la función y los límites a derecha e izquierda del punto de discontinuidad, para después cumplir la igualdad de los límites de la derivada a derecha e izquierda del punto en estudio. El punto de discontinuidad, en esta función **g(x)**, es **x =0**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0^2+1=1 \\ g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1 \end{cases}\Rightarrow Siendo\ g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^-} g(x)=1\Rightarrow La\ \ función\ es\ continua$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x>0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=2\cdot 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=0 \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g'(x)=\lim_{x\to 0^-} g'(x)=0$$

La función g(x) es derivable

c)

la segunda derivada de una función de cuarto grado es una función de **segundo grado**, como máximo, por lo tanto los puntos de inflexión que puede tener son, como máximo, **dos o ninguno**

3. Considera la recta $r \equiv \frac{x-5}{-1} = y-2 = z$ y sea s la recta que pasa por los puntos $A=(1,6,6)$ y $B=(4,c,5)$.

a) [1,5 PUNTOS] Determina el valor del parámetro c para que las rectas r y s se corten. Halla el punto de corte P.

b) [1 PUNTO] Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las dos rectas r y s.

c) [0,75 PUNTOS] Halla el coseno del ángulo α que forman las rectas r y s. (Si no has determinado el valor del parámetro c, calcula $\cos\alpha$ en función de c).

a) Igualadas las ecuaciones paramétricas de las dos rectas el sistema de ecuaciones lineales tiene que ser compatible determinado. Dado que las incógnitas son dos y las ecuaciones tres el determinante de la matriz de los coeficientes ampliados tiene que ser nulo para que su rango sea dos igual que el rango de la matriz de los coeficientes que buscaremos entre los mínimos resultantes.
La recta **s** que une **A** con **B** tiene como vector director **AB** y quedará determinada por uno cualquiera de sus puntos (tomaremos **A**).

$$\left\{\begin{array}{l} r \equiv \left\{\begin{array}{l} x=5-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \\ \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{AB}=(4,c,5)-(1,6,6)=(3,c-6,-1) \Rightarrow s \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+3\mu \\ y=6+(c-6)\mu \\ z=6-\mu \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5-\lambda=1+3\mu \\ 2+\lambda=6+(c-6)\mu \\ \lambda=6-\mu \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+3\mu=4 \\ \lambda-(c-6)\mu=4 \\ \lambda+\mu=6 \end{array}\right. \Rightarrow |A/B|=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6-c & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3-c & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3-c & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=6-2c \Rightarrow 6-2c=0 \Rightarrow$$

$$2c=6 \Rightarrow c=3 \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow Si\ c=3 \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2=Número\ de\ incógnitas$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+3\mu=4 \\ -3\lambda-3\mu=-18 \end{array}\right. \Rightarrow -2\lambda=-14 \Rightarrow \lambda=\frac{-14}{-2}=7 \Rightarrow P\left\{\begin{array}{l} x=5-7=-2 \\ y=2+7=9 \\ z=7 \end{array}\right. \Rightarrow P(-2,9,7)$$

b) El plano π queda determinado por los dos vectores directores de las rectas y por el vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano. Como lo tres vectores son coplanarios el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,3-6,-1)=(3,-3,-1) \\ \overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(-2,9,7)=(x+2,y-9,z-7) \end{array}\right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-9 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-(x+2)+3(y-9)+3(z-7)-3(z-7)+3(x+2)-(y-9)=0 \Rightarrow 2(x+2)+2(y-9)=0 \Rightarrow$$
$$(x+2)+(y-9)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y-7=0$$

Continuación Problema 3 de la Opción de Examen 2

c) El coseno del ángulo α que forman dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores y es el cociente entre el valor absoluto del producto escalar de los directores y el producto de sus módulos

Conocido **c**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (3,-3,-1) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(-1,1,1)\cdot(3,-3,-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-3-3-1\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = \frac{\left|-7\right|}{\sqrt{57}} = \frac{7\sqrt{57}}{57}$$

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{7\sqrt{57}}{57}\right) = 22^{\circ}6''$$

Sin conocer **c**

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(-1,1,1)\cdot(3,c-6,-1)\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(c-6)^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-3+c-6-1\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+(c-6)^2}} = \frac{\left|c-10\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+c^2-12c+36}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|c-10\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{46+c^2-12c}}$$