OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1.- Considera las matrices $M=\begin{pmatrix}2a & b & 1\\ 3 & -2b & -2c\\ 5a & -2 & c\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}3c\\ a\\ -4b\end{pmatrix}$ con $m\in\Re$

a) **(2 puntos)** Determinar los valores **a**, **b** y **c** para que se verifique la igualdad $M\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=N$

b) **(1'5 puntos)** Estudia el carácter de ecuaciones lineales $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=N$ cuando **a = 0**, **b = -1** y **c = 2**

a)

$$\begin{pmatrix}2a & b & 1\\ 3 & -2b & -2c\\ 5a & -2 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c\\ a\\ -4b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+2b+3\\ 3-4b-6c\\ 5a-4+3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c\\ a\\ -4b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+2b+3=3c\\ 3-4b-6c=a\\ 5a-4+3c=-4b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2a+2b-3c=-3\\ a+4b+6c=3\\ 5a+4b+3c=4\end{cases}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & -3\\ 1 & 4 & 6\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}=24+60-12+60-48-6=144-66=78\neq 0\Rightarrow Comp\ Deter.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -3 & -3\\ 1 & 4 & 6 & 3\\ 5 & 4 & 3 & 4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & -15 & -9\\ 1 & 4 & 6 & 3\\ 0 & -16 & -27 & -11\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & -15 & -9\\ 1 & 4 & 6 & 3\\ 0 & 96 & 162 & 66\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -6 & -15 & -9\\ 1 & 4 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 78 & 78\end{array}\right)\Rightarrow 78c=78\Rightarrow c=1$$

$$-6b-15\cdot 1=-9\Rightarrow -6b=6\Rightarrow b=-1\Rightarrow a+4\cdot(-1)+6\cdot 1=3\Rightarrow a=3+4-6=1\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(a\ ,\ b\ ,\ c)=(1\ ,\ -1\ ,\ 1)$$

$b)$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=-12+6\neq 0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 6\\ 3 & 2 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 4\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 6\\ 3 & 2 & -4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2\end{array}\right)\Rightarrow -y=-2\Rightarrow y=2\Rightarrow -2+2z=6\Rightarrow 2z=8\Rightarrow z=4\Rightarrow$$

$$3x+2\cdot 2-4\cdot 4=0\Rightarrow 3x+4-16=0\Rightarrow 3x=12\Rightarrow x=4\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=(4\ ,\ 2\ ,\ 4)$$

2.- Considera la función: $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=1-\dfrac{3x}{x^2-4}$

a) **(1'25 puntos)** Determina el dominio de definición de la función **f**. Calcula los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de **f**
b) **(1 punto)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función **f.**
b) **(1'25 puntos)** Halla los puntos de inflexión de **f**. Esboza la gráfica de la función **f**

$a)$

$$x^2-4=0\Rightarrow (x+2)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases} x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow f(-2)=1-\dfrac{3\cdot(-2)}{(-2)^2-4}=1+\dfrac{6}{0}\Rightarrow Sin\ sol \\ x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=1-\dfrac{3\cdot 2}{2^2-4}=1-\dfrac{6}{0}\Rightarrow Sin\ soluc\end{cases}\Rightarrow$$

$$Dom(f)=\forall x\in\Re-\{-2\,,\,2\}$$

$$Corte\ con\ OX\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow 0=1-\frac{3x}{x^2-4}\Rightarrow\frac{3x}{x^2-4}=1\Rightarrow x^2-4=3x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow$$

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25\geq 0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{3+5}{2}=4 \\ x=\dfrac{3-5}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow\begin{cases}(-1\,,\,0)\\(4\,,\,0)\end{cases}$$

$$Corte\ con\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=1-\frac{3\cdot 0}{0^2-4}=1+\frac{0}{4}=1\Rightarrow Punto\ de\ corte\ con\ OY\Rightarrow(0\,,\,1)$$

$$As\acute{\imath}ntotas\ verticales\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\x=2\end{cases}$$

$As\acute{\imath}ntotas\ horizontales$

$$y=\lim_{x\to\infty}1-\frac{3x}{x^2-4}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-4}=1-\frac{\infty}{\infty}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=1-\frac{\frac{3}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=1-\frac{0}{1-0}=1$$

$$Existe\ una\ as\acute{\imath}ntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{3x}{x^2-4}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{3(-x)}{(-x)^2-4}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{3x}{x^2-4}=1+\frac{\infty}{\infty}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$=1+\frac{\frac{3}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=1+\frac{0}{1-0}=1+0=1$$

$$Existe\ una\ as\acute{\imath}ntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to-\infty$$

Continuación del problema 2 de la Opción del Examen nº 1

a)Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3x}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-4}=\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty}=0-0=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3x}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2-4}=\frac{1}{-\infty}-\frac{3}{-\infty}=-0+0=0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

b)

$$f'(x)=0-3\cdot\frac{(x^2-4)-2xx}{(x^2-4)^2}=-3\cdot\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=-3\cdot\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=3\cdot\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}\Rightarrow x^2+4=0\Rightarrow$$

$$x^2=-4\Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow \textit{Creciente}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow 3\cdot\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}>0\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x^2+4>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ (x^2-4)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \end{array}\right.\Rightarrow \textit{Creciente}\Rightarrow\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(-2<x<2)\cup(x>2)$$

c)

$$f''(x)=3\cdot\frac{2x(x^2-4)^2-2\,2x(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)^4}=3\cdot\frac{2x(x^2-4)-4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3}=3\cdot\frac{2x^3-8x-4x^3-16x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x)=3\cdot\frac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3}=-6x\cdot\frac{x^2+12}{(x^2-4)^3}\Rightarrow x^2+12=0\Rightarrow x^2=-12\Rightarrow x=\pm\sqrt{-12}\Rightarrow \textit{Sin solución}\Rightarrow$$

$$\textit{Concavidad}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow 6x\cdot\frac{x^2+12}{(x^2-4)^3}>0\Rightarrow 6x\cdot\frac{x^2+12}{(x-2)^3(x+2)^3}>0\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -6<0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x>0 \\ x^2+12>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ (x-2)^3>0\Rightarrow x-2>0\Rightarrow x>2 \\ (x+2)^3>0\Rightarrow x+2>0\Rightarrow x>-2 \end{array}\right.$$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … ∞
-6 < 0	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x^2+12 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Concavidad $\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(0<x<2)$

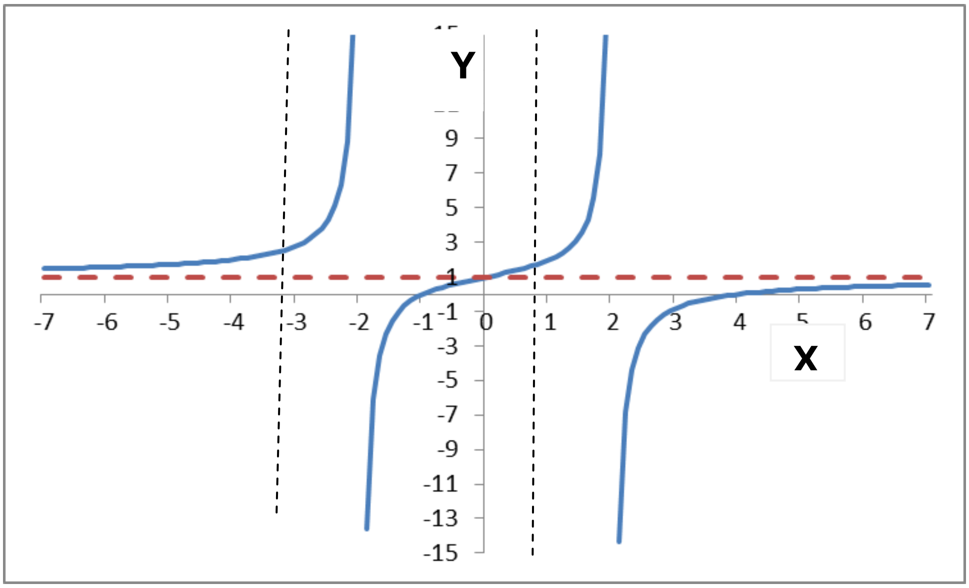
Convexidad $\forall x\in\Re/(-2<x<0)\cup(x>2)$

Continuación del problema 2 de la Opción del Examen nº 1

c) Continuación

Los posibles puntos de inflexión están en **x = 0**, x = -2 y x =2, estos dos últimos no lo pueden ser ya que no existe función en ellos tal como vimos en el apartado a)

Punto de inflexión en $x=0 \Rightarrow f(0)=1-\dfrac{3\cdot 0}{0^2-4}=1+\dfrac{0}{4}=1+0=1$



3.- a) [1,75 PUNTOS] Dados los vectores $\vec{u}=(a\,,b\,,1)$, $\vec{v}=(-3\,,4\,,1)$ y $\vec{w}=(1\,,2\,,c)$, determina el valor de los parámetros **a, b, c ∊ R** de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u}\ x\ \vec{w}=\vec{v}$, donde $\vec{u}\ x\ \vec{w}$ denota el producto vectorial.

b) [1,5 PUNTOS] Sea r la recta que pasa por el punto **P = (1 , -1 , 1)** y tiene como vector director $\vec{v_r}=(1\,,2\,,-2)$.¿Existe algún valor de k para el cuál la recta r está contenida en el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=k$? En caso afirmativo, calcula el valor de **k**

a) El producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es nulo y el otro dato es el del problema

$$\begin{cases} \begin{cases}\vec{v}=(-3\,,4\,,1)\\ \vec{w}=(1\,,2\,,c)\end{cases} \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{w}\Rightarrow \vec{v}\perp\vec{w}=0\Rightarrow(-3\,,4\,,1)\cdot(1\,,2\,,c)=0\Rightarrow -3+8+c=0\Rightarrow c=5 \\ \vec{u}\wedge\vec{w}=\vec{v}\Rightarrow \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & 1\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=-3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow -5b\vec{i}+\vec{j}+2a\vec{k}-b\vec{k}-2\vec{i}+5a\vec{j}=-3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow \begin{cases}-5b-2=-3\\ 1+5a=4\\ 2a-b=1\end{cases}\end{cases}$$

$$-5b=-1\Rightarrow b=\frac{1}{5}\Rightarrow 5a=3\Rightarrow a=\frac{3}{5}\Rightarrow 2\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=1\Rightarrow\frac{5}{5}=1\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Solución\Rightarrow(a\,,b\,,c)=\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},5\right)$$

b) Si la recta **r** está contenida en el plano su vector director y el del plano son perpendiculares y su producto escalar nulo.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,\,2\,,\,-2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,\,3\,,\,4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,\,-2)\cdot(2\,,\,3\,,\,4) = 2+6-8 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi}$$

La recta y el plano son siempre paralelos, si queremos que pertenezca al plano, lo hará, también, el punto P por el que pasa

$$\pi \equiv 2x+3y+4z = k \Rightarrow k = 2\cdot 1+3\cdot(-1)+4\cdot 1 = 2-3+4 = 3 \Rightarrow \pi \equiv 2x+3y+4z = 3$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1.- Las edades de Juan, su padre y su abuelo cumplen las siguientes condiciones: la suma de las edades de Juan, su padre y el doble de la del abuelo es 182 años; el doble de la edad de Juan más la del abuelo es 100 años, y la de su padre es **k** veces la de Juan

a) [1 PUNTO] Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita hallar las edades de Juan, su padre y su abuelo.

b) [1 PUNTO] Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución. ¿Es posible que la edad del padre de Juan sea el triple que la de Juan?

c) [1,25 PUNTOS] Calcula, si es posible, las edades de cada uno para **k = 2** y **k = 4**

a) Llamando J a la edad de Juan, A a la de su abuelo y P a la de su padre, tendremos

$$\begin{cases} J+2A+P=182 \\ 2J+A=100 \\ P=kJ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J+2A+P=182 \\ 2J+A=100 \\ kJ-P=0 \end{cases}$$

b) El sistema tiene que ser Compatible Determinado y, por ello, el determinante de los coeficientes **no puede ser nulo**

$$\begin{cases} J+2A+P=182 \\ 2J+A=100 \\ kJ-P=0 \end{cases} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1-k+4=3-k \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 3-k=0 \Rightarrow k=3$$

$$\forall k \in \Re-\{3\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Para\ k=3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 2 & 1 & 0 & 100 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & -6 & -4 & -546 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ \ Incompatible$$

El padre **no puede** tener el triple de la edad de Juan

$$c)\ Si\ k=2 \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 2 & 1 & 0 & 100 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & -4 & -3 & -364 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & 12 & 9 & 1092 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \end{array}\right)$$

$$P=36 \Rightarrow 3A+2\cdot 36=264 \Rightarrow 3A+72=264 \Rightarrow 3A=192 \Rightarrow A=\frac{192}{3}=64 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} J+2\cdot 64+36=182 \Rightarrow J+128+36=182 \Rightarrow J=182-164=18\ años \\ 2J=36 \Rightarrow J=\dfrac{36}{2}=18\ años \end{cases}$$

$$Solución \Rightarrow (J\ ,\ A\ ,\ P)=(18\ ,\ 64\ ,\ 36)\ años$$

Continuación del Problema 1 de Opción de Examen 2

$c)$*Continuación* $\Rightarrow$ *Si* $k=4 \Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 2 & 1 & 0 & 100 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & -8 & -5 & -728 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & 16 & 10 & 1456 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 182 \\ 0 & -3 & -2 & -264 \\ 0 & 1 & 0 & 136 \end{array}\right)$$

$$A=136 \Rightarrow 3\cdot 136+2\cdot P=-264 \Rightarrow 408+2P=264 \Rightarrow 2P=-144 \Rightarrow P=-\frac{144}{2}=-72 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} J+2\cdot 136-72=182 \Rightarrow J+272-72=182 \Rightarrow J=182-200=-18 \text{ años} \\ 4J=-72 \Rightarrow J=\dfrac{-72}{4}=-18 \text{ años} \end{cases}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (J\,,\,A\,,\,P)=(-18\,,136\,,-72) \text{ años}$$

Solución del sistema, pero, evidentemente, no del problema planteado

2.- Considera la función, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2\right)}{x} & si \quad x>0 \\ x^2-2x+a & si \quad x\le 0 \end{cases}$

a) **(1'5 puntos)** Calcular el valor de **a** para que la función sea continua en toda $\Re$

b) **(1 punto)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función **f** en el punto de abcisa **x = -1**

c) **(1 punto)** Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función **f**, el eje de abcisas (y = 0) y las rectas verticales **x = -1** y **x = 0**

$a)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{sen\left(0^2\right)}{0}=\dfrac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\cos\left(x^2\right)}{1}=2\cdot 0\cdot\cos\left(0^2\right)=2\cdot 0\cdot 1=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0^2-2\cdot 0+a=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow a=0$$

$b)$

$$\begin{cases} f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)=1+2=3 \\ f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2xx\cos\left(x^2\right)-sen\left(x^2\right)}{x^2} & si \quad x>0 \\ 2x-2 \quad si \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(-1)=2\cdot(-1)-2=-4 \end{cases} \Rightarrow y-3=-4\cdot[x-(-1)]\Rightarrow$$

$$y-3=-4\cdot(x+1)\Rightarrow y-3=-4x-4 \Rightarrow y=-4x-1 \Rightarrow 4x+y-1=0$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2\right)}{x} & si \quad x>0 \\ x^2-2x+a & si \quad x\le 0 \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de Opción de Examen 2

$c)$

$$-1<-\frac{1}{2}<0\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}>0$$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]-\left[0^2-(-1)^2\right]=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$

3.- Considera las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x-mz=1\\2x+y=2\end{cases}$ y $r_2\equiv\begin{cases}x=1-s\\y=1+2s\ ,\ s\in\Re\\z=-s\end{cases}$

a) **(1 punto)** Determinar el valor del parámetro **m** para que las rectas r_1 y r_2 sean paralelas

b) **(1'25 puntos)** Calcula la distancia del punto **P = (1 , 1 , 1)** a la recta r_2

c) **(1 punto)** Halla la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r_2 y pasa por el punto **Q = (1 , 0 , -3)**

a) Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases}mz=x-1\Rightarrow z=-\frac{1}{m}+\frac{x}{m}\Rightarrow y=2-2x\Rightarrow r_1\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2-2\lambda\\z=-\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{m}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_{r_1}}=\left(1,-2,\frac{1}{m}\right)\equiv(m,-2m,1)\Rightarrow\\\overrightarrow{v_{r_2}}=(-1,2,-1)\end{cases}$$

$$\frac{m}{-1}=\frac{-2m}{2}=\frac{1}{-1}\Rightarrow\frac{m}{-1}=\frac{-m}{1}=\frac{1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\frac{m}{-1}=\frac{1}{-1}\Rightarrow m=1\\\frac{-m}{1}=\frac{1}{-1}\Rightarrow m=1\end{cases}\Rightarrow m=1$$

Continuación del Problema 3 de Opción de Examen 2

b) Se hallara un plano α que contenga el punto **P** y que sea perpendicular a la recta r_2, su vector director es el de la recta y es perpendicular al vector **PG** siendo **G** el punto genérico del plano buscado y, por ello, el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación buscada.
Una vez obtenido el plano π, hallaremos el punto **Q** intersección del plano con la recta. El módulo del vector **PQ** es la distancia pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_2}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_2}} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1, 2, -1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow -(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - 2y + z = 0$$

$$Intersección \Rightarrow (1-s) - 2(1+s) + (-s) = 0 \Rightarrow -1 - 4s = 0 \Rightarrow 4s = -1 \Rightarrow s = -\frac{1}{4} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \\ y = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \\ z = -\left(-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$Q\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) \Rightarrow d(P, r_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$d(P, r_2) = \sqrt{\frac{1+1+9}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}\, u$$

c) Se hallara un plano π que contenga el punto **Q** y que es perpendicular a la recta r_2, su vector director es el de la recta y es perpendicular al vector **QG** siendo **G** el punto genérico del plano buscado y, por ello, el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación buscada.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_2}} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{QG} = (x, y, z) - (1, 0, 3) = (x-1, y, z-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_2}} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_2}} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1, 2, -1) \cdot (x-1, y, z-3) = 0 \Rightarrow -(x-1) + 2y - (z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - 4 = 0$$