OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}$.

a) [1 PUNTO] Calcula la matriz $B=A^2-2A$.

b) [1 PUNTO] Determina para qué valores de a la matriz B tiene inversa.

c) [1,25 PUNTOS] Para $a=1$, calcula si es posible A^{-1} y B^{-1}.

$a)$

$$B=A\cdot(A-2I)\Rightarrow A-2I=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & a-2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & a-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1+2-a\\ a-1 & -1+a^2-2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1-a\\ a-1 & a^2-2a-1\end{pmatrix}$$

b) Una matriz tiene inversa cuando el determinante de su matriz no es nula

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 1-a\\ a-1 & a^2-2a-1\end{vmatrix}=-2a^2+4a+2-(a-1)(1-a)=-2a^2+4a+2+(a-1)^2=-2a^2+4a+2+a^2-2a+1$$

$$|B|=-a^2+2a+3\Rightarrow Si\ |B|=0\Rightarrow -a^2+2a+3=0\Rightarrow a^2-2a-3=0\Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16\geq 0\Rightarrow$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2+4}{2}=3\\ a=\dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall a\in\Re-\{-1,3\}\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow Existe\ B^{-1}$$

$c)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|B|=-1^2+2\cdot1+3=4\neq 0\Rightarrow Existe\ B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot adj\left(B^t\right)\Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left(B^t\right)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

2. Considera la función $f(x)=\begin{cases} sen(x) & si \quad x\in[-2\pi,0) \\ x^2-2x & si \quad x\in[0,3] \end{cases}$

a) [1 PUNTO] Estudia si la función f es derivable en $x=0$.

b) [1,5 PUNTOS] Calcula los puntos de corte con los ejes. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. Dibuja su gráfica.

c) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas ($y=0$) y las rectas verticales $x=0$ y $x=3$.

a) Para que una función sea derivable, inicialmente debe de ser continua en el punto de discontinuidad **x =0**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=sen(0)=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2-2\cdot 0=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=0 \Rightarrow$$

$$f'(x)=\begin{cases} \cos(x) & si \quad x\in(-2\pi,0) \\ 2x-2 & si \quad x\in(0,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\cos(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2\cdot 0-2=-2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x)=-2\neq \lim_{x\to 0^-} f'(x)=1$$

La función no es derivable en **x = 0**

b)

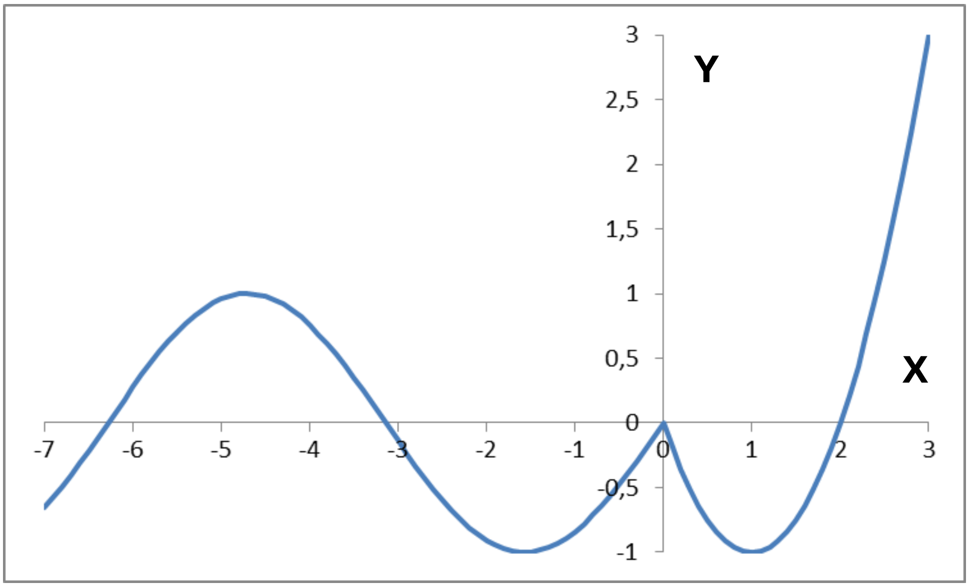
$$Corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} sen(x)=0 \Rightarrow x=0+k\pi,\ k\in Z \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \Rightarrow x=-2\pi \\ k=-1 \Rightarrow x=-\pi \\ k=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \\ x^2-2\cdot x=0 \Rightarrow (x-2)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$Corte\ con\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0^2-2\cdot 0=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} \cos(x) & si \quad x\in(-2\pi,0) \\ 2x-2 & si \quad x\in(0,3) \end{cases} \Rightarrow Creciente\ f'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} sen\ x>0 \Rightarrow -\pi<x<-2\pi \\ 2x-2>0 \Rightarrow 2x>2 \Rightarrow x>1 \end{cases}$$

Creciente $\forall x\in\Re/(-\pi<x<-2\pi)\cup(1<x<3)$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/1<x<-\pi$

Continuación del Problema 2 del Examen nº 1
b) Continuación



$c)$

$$A=\left|\int_0^2 (x^2-2x)\,dx\right|+\int_2^3 (x^2-2x)\,dx=\int_0^2 (2x-x^2)\,dx+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_2^3-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_2^3$$

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2+\frac{1}{3}\cdot(3^3-2^3)-(3^2-2^2)=(2^2-0^2)-\frac{1}{3}\cdot(2^3-0^3)+\frac{27-8}{3}-(9-4)$$

$$A=4-\frac{8}{3}+\frac{19}{3}-5=\frac{11}{3}-1=\frac{8}{3}u^2$$

3. Considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi:\ ax+2y-4z-23=0,\quad r\equiv\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=z+3$$

a) [1 PUNTO] Halla el valor de a para el cuál la recta r está contenida en el plano π.

b) [1 PUNTO] ¿Existe algún valor de a para el que la recta r es perpendicular al plano π?

c) [1,25 PUNTOS] Para $a=1$, calcula la ecuación general del plano π_1 que es perpendicular al plano π y que contiene a la recta r.

a) Los vectores directores de la recta r y el plano π son perpendiculares y por ello es nulo su producto escalar

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v_\pi}=(a,2,-4)\\ \overrightarrow{v_r}=(4,-4,1)\end{array}\right.\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(a,2,-4)\cdot(4,-4,1)=0\Rightarrow 4a-8-4=0\Rightarrow 4a-12=0\Rightarrow$$

$$4a=12\Rightarrow a=\frac{12}{4}=3$$

Continuación del Problema 3 del Examen nº 1

b) Para que recta y plano sean perpendiculares sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,\ 2\ ,\ -4) \\ \overrightarrow{v_r} = (4\ ,\ -4\ ,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-4}{1} \Rightarrow \textit{No pueden ser perpendiculares para ningún valor de a}$$

c) En este caso el plano queda determinado por los vectores directores de la recta y el plano y por el vector RG, siendo R un punto cualquiera de la recta r (tomamos el indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano que se busca. Los tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\textit{Siendo } R(3\ ,1\ ,-3) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1\ ,\ 2\ ,\ -4) \\ \overrightarrow{v_r} = (4\ ,\ -4\ ,\ 1) \\ \overrightarrow{RG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (3\ ,1\ ,-3) = (x-3\ ,\ y-1\ ,\ z+3) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2\,(x-3) - 16\,(y-1) - 4\,(z-3) - 8\,(z-3) - 16\,(x-3) - (y-1) = 0 \Rightarrow -14\,(x-3) - 17\,(y-1) - 12\,(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 14x + 17y + 12z - 95 = 0$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1. [3,25 PUNTOS] Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + az = -2 \\ ay + z = 0 \\ x + ay + z = -2 \end{cases}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Estúdialo para los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-a^2 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1-a)(1+a) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (1-a)(1+a) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-1, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 = rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow x - z + z = -2 \Rightarrow x = -2$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (-2, -\lambda, \lambda)$$

$$Cuando\ el\ sistema\ es\ Compatible\ Determinado \Rightarrow \forall a \in \Re - \{-1, 1\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & a & -2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & 0 & -2+2a \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow (1-a)y = -2 + 2a \Rightarrow y = \frac{2(a-1)}{1-a} = -\frac{2(a-1)}{a-1} = -2 \Rightarrow$$

$$-2a + z = 0 \Rightarrow z = 2a \Rightarrow x + (-2)a + 2a = -2 \Rightarrow x - 2a + 2a = -2 \Rightarrow x = -2$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = (-2, -2, 2a)$$

2.

a) [2 PUNTOS] Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble de otro y que la suma de los cuadrados de los tres sea mínima.

b) [1,5 PUNTOS] Considera la función $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. Justifica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

b-1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

b-2) La función f tiene un máximo relativo en $x=1$.

a)

Sean los números **a**, **2a** y **b**

$$\begin{cases} a+2a+b=14\Rightarrow b=14-3a \\ S=a^2+(2a)^2+b^2 \end{cases}\Rightarrow S=a^2+4a^2+(14-3a)^2=5a^2+196-84a+9a^2=14a^2-84a+196\Rightarrow$$

$$S=14a^2-84a+196=14\left(a^2-6a+14\right)\Rightarrow S'=\frac{dS}{da}=14\left(2a-6\right)=28\left(a-3\right)\Rightarrow$$

$$Si\ S'=0\Rightarrow 28\left(a-3\right)=0\Rightarrow a-3=0\Rightarrow a=3\Rightarrow S''=\frac{d^2S}{da^2}=28>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ 2a=2\cdot3=6 \\ b=14-3\cdot3=5 \end{cases}$$

$b)$

$b-1)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty}=0\neq1\Rightarrow Es\ \ falsa$$

$b-2)$

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow\ f'(x)>0\Rightarrow\begin{cases} 1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1 \\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$	**1** ∞
x < 1	**(+)**	**(-)**
$e^x > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x\in\Re/x<1$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/x>1$

Hay un Máximo relativo en x = 1 (de creciente pasa a decreciente)
La afirmación es verdadera

3. Considera la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-2y-11=0 \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases}$ y los puntos $A=(0,1,1)$ y $B=(1,2,1)$.

a) [1,5 PUNTOS] Halla un punto P de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

b) [1 PUNTO] Calcula la ecuación general del plano π que contiene a la recta r y al punto A.

c) [0,75 PUNTOS] Determina la distancia del punto B al plano π.

a) Los módulos de los vectores AR y BR, donde R es el punto genérico de la recta hallado en sus ecuaciones paramétricas, son iguales

$$\begin{cases} 3x-2y-11=0 \\ -4x+2y+2z+10=0 \end{cases} \Rightarrow -x+2z-1=0 \Rightarrow x=-1+2z \Rightarrow 2\cdot(-1+2z)-y-z-5=0 \Rightarrow y=-7+3z \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-7+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AR}=(-1+2\lambda\,,-7+3\lambda\,,\lambda)-(0\,,1\,,1)=(-1+2\lambda\,,-8+3\lambda\,,\lambda-1) \\ \overrightarrow{BR}=(-1+2\lambda\,,-7+3\lambda\,,\lambda)-(1\,,2\,,1)=(-2+2\lambda\,,-9+3\lambda\,,\lambda-1) \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AR}\right|=\left|\overrightarrow{BR}\right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-1+2\lambda)^2+(-8+3\lambda)^2+(\lambda-1)^2}=\pm\sqrt{(-2+2\lambda)^2+(-9+3\lambda)^2+(\lambda-1)^2} \Rightarrow$$

$$(-1+2\lambda)^2+(-8+3\lambda)^2+(\lambda-1)^2=(-2+2\lambda)^2+(-9+3\lambda)^2+(\lambda-1)^2 \Rightarrow$$

$$1-4\lambda+4\lambda^2+64-48\lambda+9\lambda^2=4-8\lambda+4\lambda^2+81-54\lambda+9\lambda^2 \Rightarrow$$

$$1-4\lambda+4\lambda^2+64-48\lambda+9\lambda^2-4+8\lambda-4\lambda^2-81+54\lambda-9\lambda^2=0 \Rightarrow -20+10\lambda=0 \Rightarrow 10\lambda=20 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$$

$$P\begin{cases} x=-1+2\cdot 2 \\ y=-7+3\cdot 2 \Rightarrow P(3\,,-1\,,2) \\ z=2 \end{cases}$$

b) Los vectores que determinan al plano π son el vector director de la recta r, el vector AP, siendo P un punto cualquiera de la recta (tomamos el hallado en el apartado anterior) y el vector AG, siendo G el punto genérico del plano buscado. Estos tres vectores son coplanarios y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{AP}=(3\,,-1\,,2)-(0\,,1\,,1)=(3\,,-2\,,1) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,1\,,1)=(x\,,y-1\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$3x+3(y-1)-4(z-1)-9(z-1)+2x-2(y-1)=0 \Rightarrow 5x+(y-1)-13(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 5x+y-13z+12=0$$

$c)$

$$d(B\,,\pi)=\frac{|5\cdot 1+2-13\cdot 1+12|}{\sqrt{5^2+1^2+(-13)^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{195}}=\frac{6\sqrt{195}}{195}=\frac{2\sqrt{195}}{65}\,u$$