OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$.

a) [0,75 PUNTOS] Sabiendo que se verifica $A \cdot B = 2C - D$, plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y, z y donde a es un parámetro.

b) [2,5 PUNTOS] Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

a)

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ x+ay \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ 2-z \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax+y=2-z \\ x+ay=2-z \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=2 \\ x+ay+z=2 \\ x+z=0 \end{cases}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a\,(a-1) \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a\,(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado}$$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$$

$$\text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z \Rightarrow -z+y+z=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (-\lambda\,,\,2\,,\,\lambda)$$

$$\text{Cuando el Sistema es Compatible Determinado} \Rightarrow \forall a \in \Re - \{0\,,1\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow ay=2 \Rightarrow y=\frac{2}{a} \Rightarrow (a-1)x+\frac{2}{a}=2 \Rightarrow (a-1)x = 2-\frac{2}{a} \Rightarrow$$

$$(a-1)x = \frac{2a-2}{a} \Rightarrow x = \frac{2\,(a-1)}{a\,(a-1)} = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a}+z=0 \Rightarrow z=-\frac{2}{a} \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(\frac{2}{a}\,,\,\frac{2}{a}\,,\,-\frac{2}{a}\right)$$

2.

a) [2 PUNTOS] Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 euros el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 euros el metro. Hallar el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 euros.

b) [1,5 PUNTOS] Halla las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x+y=0$.

a) Suponiendo que la longitud del lado que da al caminos sea C, y los otros tres **C** uno de ellos y los otros dos lados **B**

$$\begin{cases} 3000=125C+25C+25\cdot 2B\Rightarrow 3000=150C+50B\Rightarrow 3000=50\cdot(3C+B)\Rightarrow 60=3C+B \\ S=BC \end{cases}\Rightarrow$$

$$B=60-3C\Rightarrow S=(60-3C)\,C=60C-3C^2=3\left(20C-C^2\right)\Rightarrow S'=\frac{dS}{dC}=3\,(20-2C)=6\,(10-C)\Rightarrow$$

$$S'=0\Rightarrow 6\,(10-C)=0\Rightarrow 10-C=0\Rightarrow C=10\Rightarrow S'=\frac{d^2S}{dC^2}=-6<0\Rightarrow \textit{Máximo}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} C=10\ m \\ B=60-3\cdot 10=30\ m \end{cases}\Rightarrow S_{\max}=30\cdot 10=300\ m^2$$

$b)$

$$\begin{cases} y=-2x\Rightarrow m=-2 \\ f'(x)=2\dfrac{(x-1)-x}{(x-1)^2}=2\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2} \end{cases}\Rightarrow -\frac{2}{(x-1)^2}=-2\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=1\Rightarrow (x-1)^2=1\Rightarrow$$

$$x^2-2x+1=1\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow (x-2)\,x=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0\Rightarrow x=2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0\Rightarrow y-0=-2\,(x-0)\Rightarrow y=-2x\Rightarrow y+2x=0 \\ f(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4\Rightarrow y-4=-2\,(x-2)\Rightarrow y-4=-2x+4\Rightarrow y=-2x+8\Rightarrow 2x+y-8=0 \end{cases}$$

3. El vértice A de un triángulo rectángulo está en la recta $r \equiv \begin{cases} x & = 3 \\ y+z+1 & = 0 \end{cases}$ y su hipotenusa tiene los vértices en los puntos $B=(2,1,-1)$ y $C=(0,-1,3)$.

a) [1,5 PUNTOS] Halla el punto A y el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) [0,5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta s que pasa por los puntos B y C.

c) [1,25 PUNTOS] Estudia la posición relativa de las rectas r y s. En caso de que las rectas se corten, halla el punto de intersección.

a) Los vectores **AB** y **AC** son perpendiculares y su producto escalar es nulo**.** El punto **A** es el punto genérico de la recta **r** cuya ecuación hallaremos en paramétricas
El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$y=-1-z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2,1,-1)-(3,-1-\lambda,\lambda)=(-1,2+\lambda,-1-\lambda) \\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,3)-(3,-1-\lambda,\lambda)=(-3,\lambda,3-\lambda) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow (-1,2+\lambda,-1-\lambda)\cdot(-3,\lambda,3-\lambda)=0 \Rightarrow 3+\lambda(2+\lambda)+(3-\lambda)(-1-\lambda)=0 \Rightarrow$$

$$3+2\lambda+\lambda^2-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2=0 \Rightarrow 2\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow A \begin{cases} x=3 \\ y=-1-0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(3,-1,0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-1,2+0,-1-0)=(-1,2,-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-3,0,3-0)=(-3,0,3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}+3\vec{j}=6\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3} \Rightarrow Área=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}=3\sqrt{3}\ u^2$$

$b)$

$$\overrightarrow{BC}=(0,-1,3)-(2,1,-1)=(-2,-2,4)\equiv(1,1,-2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-1+\mu \\ z=3-2\mu \end{cases}$$

Continuación del problema 3 de la Opción del Examen nº 1

c) Analizaremos si las rectas, dadas en ecuaciones paramétricas, si el sistema que resulta de igualar sus coordenadas es compatible determinado son secantes y se cortan en un punto **P**, si es compatible indeterminado las rectas coinciden. Para hallar la compatibilidad es condición necesaria que el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada sea nula.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = -1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 3-2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \mu \\ -1-\lambda = -1+\mu \\ \lambda = 3-2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 3 \\ \lambda+\mu = 0 \\ \lambda+2\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-3-3 = 0 \Rightarrow$$

$$Como\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 2 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Se\ cor\tan\ en\ un\ punto\ P$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow \lambda + 2\cdot 3 = 3 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow P\begin{cases} x = 3 \\ y = -1+3 \\ z = 3-2\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow P(3\ ,\ 2\ ,\ -3)$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1. La suma de las tres cifras de un número es 16 y la suma de la primera y tercera cifras es igual a k veces la segunda. Permutando entre sí la primera y tercera cifras se obtiene un número que supera en 198 unidades al número dado.

a) [1 PUNTO] Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita hallar el número dado.

b) [1,25 PUNTOS] Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución.

c) [1 PUNTO] Para $k=1$, determina el número de tres cifras que cumple las condiciones del enunciado.

a)

Sean la cifras P, la primera, S la segunda y T la tercera

$$\begin{cases} P+S+T=16 \\ P+T=kS \\ 100T+10S+P=100P+10S+T+198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P+S+T=16 \\ P-kS+T=0 \\ 99P-99T=-198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P+S+T=16 \\ P-kS+T=0 \\ 99(P-T)=-198 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P+S+T=16 \\ P-kS+T=0 \\ P-T=-2 \end{cases}$$

$b)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -k \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-2k-2)=2k+2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 2k+2=0 \Rightarrow$$

$$k=-1$$

$$\forall k \in \Re-\{-1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$c)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 14 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow 4P=12 \Rightarrow P=\frac{12}{4}=3 \Rightarrow 2\cdot 3+S=14 \Rightarrow$$

$$S=8 \Rightarrow 3-T=-2 \Rightarrow T=5 \Rightarrow Solución \Rightarrow (P\ ,\ S\ ,\ T)=(3\ ,\ 8\ ,\ 5) \Rightarrow El\ 385$$

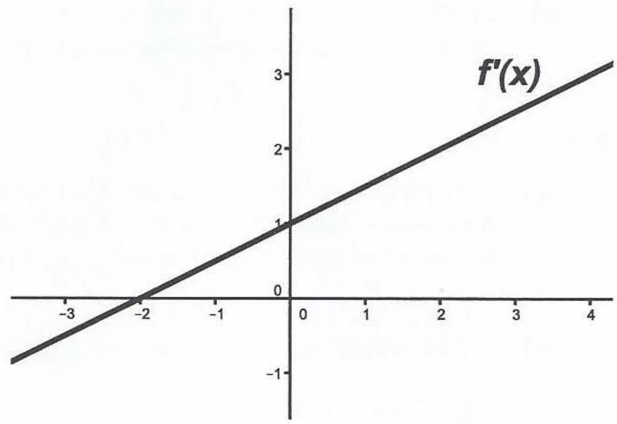
2. a) Considera la función $g:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 0 \\ x\ sen\,(x) & si \quad x>0 \end{cases}$$

a-1) [1 PUNTO] Estudia la derivabilidad de g.

a-2) [1,5 PUNTOS] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas $(y=0)$ y las rectas $x=-1$ y $x=\dfrac{\pi}{2}$.

b) [1 PUNTO] La gráfica adjunta corresponde a la función derivada f' de una función f. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene un máximo o un mínimo.



a-1) Para ser derivable tiene que ser continua y tener la misma derivada en el punto de discontinuidad **x = 0**

$$\begin{cases} g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0\cdot sen\,(0)=0 \end{cases} \Rightarrow g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=0$$

$$g'(x)=\begin{cases} 1 \quad si \quad x<0 \\ sen\,(x)+x\cdot\cos(x) \quad si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=sen\,(0)+0\cdot\cos(0)=0+0\cdot 1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x)=1\neq \lim\limits_{x\to 0^+} g'(x)=0 \Rightarrow No\ es\ derivable\ en\ x=0$$

a-2)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\ sen\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ sen\ x=0\Rightarrow x=0+\pi k\ ,\ k\in Z \end{cases} \end{cases}$$

$$-1<-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow f(x)\Rightarrow Negativa \Rightarrow x\in[-1\,,\,0]$$

$$0<1<\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(1)=1\cdot sen\,1=sen\,1>0 \Rightarrow f(x)\Rightarrow Positiva \Rightarrow x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int x\ sen\ x\ dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cos x+sen\ x+K$$

$$x=u\Rightarrow dx=du$$

$$sen\ x\ dx=dv\Rightarrow v=\int sen\ x\ dx=-\cos x$$

$a-2)Continuación$

$$A=\left|\int_{-1}^{0} x\,dx\right|+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\ sen\ x\,dx=-\int_{-1}^{0} x\,dx-\left[x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\left[sen\ x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$A=-\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}-\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cos 0\right)+\left(sen\ \frac{\pi}{2}-sen\ 0\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]-\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0-0\cdot 1\right)+(1-0)$$

$$A=-\frac{1}{2}\cdot(-1)-(0-0)+1=\frac{3}{2}\,u^2$$

b) La función **f(x)** es **decreciente** en el intervalo $(-\infty\ ,-2)$ ya que **f'(x)** es **negativo** en ese intervalo
Es **creciente** en el intervalo $(-2\ ,+\infty)$ ya que **f'(x)** es **positivo** en ese intervalo
En el punto **x = -2** existe un **Mínimo relativo** ya que la función pasa de **decreciente** a **creciente**

3. Consider la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+z-3 & =0 \\ x-2y-z+3 & =0 \end{cases}$$

a) [2 PUNTOS] Calcula el simétrico del punto $P=(4,1,-1)$ respecto de la recta r.

b) [1,25 PUNTOS] Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

a) Hallaremos un plano α que contenga al punto **P** y sea perpendicular a la recta **r**, por lo tanto el vector director del plano buscado es el de la recta que es perpendicular al vector **PG** siendo **G** el punto genérico del plano buscado. El producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación del plano buscado. Calculando el punto de intersección **Q** de la recta y el plano hallado tendremos el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$x=3-z \Rightarrow 3-z-2y-z+3=0 \Rightarrow 2y=6-2z \Rightarrow y=3-z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3-\lambda \Rightarrow \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\alpha}=\overrightarrow{v_r}=(-1,-1,1)\equiv(1,1,-1) \\ \overrightarrow{PG}=(x,y,z)-(4,1,-1)=(x-4,y-1,z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha}\perp\overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(1,1,-1)\cdot(x-4,y-1,z+1)=0 \Rightarrow x-4+y-1-z-1=0 \Rightarrow \alpha \equiv x+y-z-6=0$$

$$Intersección \Rightarrow 3-\lambda+3-\lambda-\lambda-6=0 \Rightarrow -3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow Q\begin{cases} x=3-0 \\ y=3-0 \Rightarrow Q(3,3,0) \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3=\dfrac{4+x_{P'}}{2} \Rightarrow 4+x_{P'}=6 \Rightarrow x_{P'}=2 \\ 3=\dfrac{1+y_{P'}}{2} \Rightarrow 1+y_{P'}=6 \Rightarrow y_{P'}=5 \quad \Rightarrow P'(2,5,1) \\ 0=\dfrac{-1+z_{P'}}{2} \Rightarrow -1+z_{P'}=0 \Rightarrow z_{P'}=1 \end{cases}$$

b) Del haz de planos determinado por la recta **r**, calcularemos el que contiene a **P**

$$x+z-3+\mu(x-2y-z+3)=0 \Rightarrow Conteniendo\,a\,P \Rightarrow 4+(-1)-3+\mu\,[4-2\cdot1-(-1)+3]=0 \Rightarrow$$
$$6\mu=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow x+z-3+0\cdot(x-2y-z+3)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+z-3=0$$