OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1) Considere el siguiente sistema dependiente del parámetro **t** $\begin{cases} tx+y+tz=t \\ x+ty+z=-t \\ y+tz=0 \end{cases}$

a) [2 puntos] Analice la existencia de soluciones dependiendo del valor del parámetro **t**
b) [1'25 puntos] Calcule todas las soluciones en el caso de **t = 2**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-t^2 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1-t^2 & 0 \\ 1 & t \end{vmatrix}=-t\left(1-t^2\right)=t\left(t^2-1\right)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow t\left(t^2-1\right)=0\Rightarrow$$

$$t\,(t-1)(t+1)=0\Rightarrow\begin{cases} t+1=0\Rightarrow t=-1 \\ t=0 \\ t-1=0\Rightarrow t=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall t\in\Re-\{-1\,,0\,,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\,(A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ t=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\,(A)=rang\,(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ t=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\,(A)=rang\,(A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ t=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\,(A)=2\neq rang\,(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ t=2\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -3y=6\Rightarrow y=-2\Rightarrow -2+2z=0\Rightarrow 2z=2\Rightarrow z=1\Rightarrow x-4+1=-2$$

$x=1\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(1\,,-2\,,1)$

2) Considere la función $f(x)=\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

a) **[2'5 puntos]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) **[1 punto]** Calcule la derivada de f(x)

$a)$

$$L=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=\infty^0 \Rightarrow$$

$$\ln L=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=$$

$$\ln L=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow\ln L=0\Rightarrow L=e^0=1\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}=1$$

$b)$

$$f(x)=\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow\ln f(x)=\ln\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)\Rightarrow\ln f(x)=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\Rightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}x-\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=\frac{\frac{2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}}{x^2}=\frac{2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}\Rightarrow$$

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}=\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\frac{2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}=$$

$$f'(x)=\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}-1\right)}\cdot\frac{2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=\frac{\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{x-1}{x}\right)}\left[2x^2-\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)\right]}{x^2}$$

3) Considere el punto **P(1 , 1 , 1)** y el plano $\pi\equiv(2,1,0)+\vec{t}(-1,1,1)+\vec{s}(1,-1,1)$

a) [1 punto] Calcule la recta **r** que pasa por P y es ortogonal al plano π

b) [1'25 puntos] Calcule las distancia entre P y π

c) [1 punto] Calcule la ecuación implícita (general) de π

a) El vector director de la recta r es el vector director del plano π, que se calculará como el producto vectorial de los vectores generadores del plano.

$$\begin{cases}\vec{t}=(-1,1,1)\\ \vec{s}=(1,-1,1)\end{cases}\Rightarrow v_\pi=\vec{t}\wedge\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}-\vec{k}+\vec{i}+\vec{j}=2\vec{i}+2\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(2,2,0)\equiv(1,1,0)$$

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1\end{cases}$$

Continuación del Problema 3 de la opción A

b) Hallaremos el punto **Q** de intersección de la recta **r** y el plano π. El módulo del vector **PQ** es la distancia pedida.

$b)$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 1 + t - s \\ z = t + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda = 2 - t + s \\ 1+\lambda = 1 + t - s \\ 1 = t + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + t - s = 1 \\ \lambda - t + s = 0 \\ t + s = 1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1-1-1 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 4s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{4} \Rightarrow t + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\lambda + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) - (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$d(P, \pi) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

c) Los vectores que generan el plano π y el vector genérico del punto determinado por el punto genérico del plano y el punto que determina su ecuación son coplanarios y, por ello, forman un paralelepípedo de volumen nulo (el producto mixto de los tres vectores) y la ecuación del plano pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{G} = (x-2, y-1, z) \\ \vec{s} = (1, -1, 1) \\ \vec{t} = (-1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2) + (y-1) + z - z + (x-2) + (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$2\,(x-2) + 2\,(y-1) = 0 \Rightarrow (x-2) + (y-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 3 = 0$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}$

a) [1'25 puntos] Calcule todos los vectores $v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tales que ***Av = v***

a) [2 puntos] Calcule la matriz inversa de **A**

$a)$

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x+3y+z\\ -4x+6y+3z\\ 6x-7y-4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+3y+z=x\\ -4x+6y+3z=y\\ 6x-7y-4z=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+3y+z=0\\ -4x+5y+3z=0\\ 6x-7y-5z=0\end{cases}$$

Sistema de ecuación lineales homogénea, si el determinante de los coeficientes no es nulo el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial (0, 0 , 0), de no ser así el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & 5 & 3\\ 6 & -7 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(2-2)=0\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & 1 & 0\\ -4 & 5 & 3 & 0\\ 6 & -7 & -5 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow -y+z=0\Rightarrow y=z\Rightarrow -2x+3z+z=0\Rightarrow$$

$$-2x+4z=0\Rightarrow 2x=4z\Rightarrow x=2z\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$$

b) Una matriz tiene inversa si su determinante no es nulo

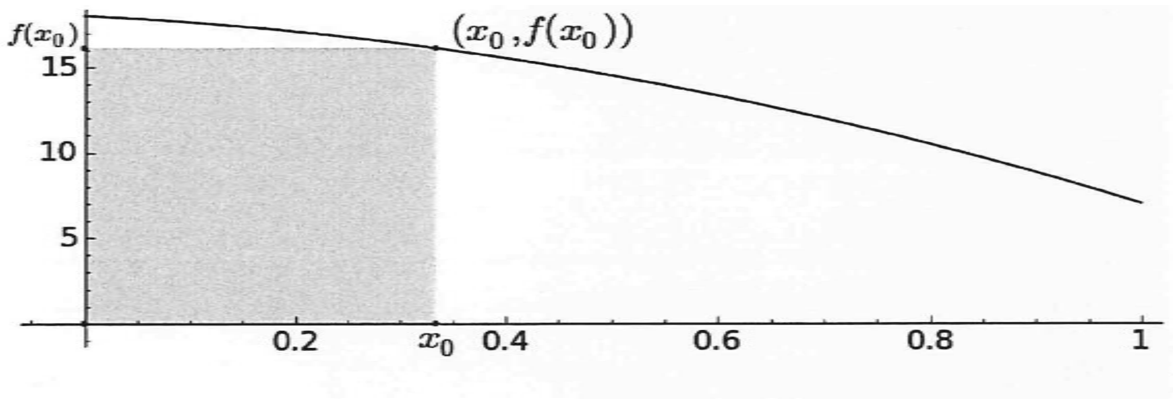
$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ -4 & 6 & 3\\ 6 & -7 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & -6 & -1\\ 0 & 11 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 11 & 2\end{vmatrix}=-(-12+11)=1\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 6\\ 3 & 6 & -7\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3\\ 2 & -2 & -1\\ -8 & 11 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3\\ 2 & -2 & -1\\ -8 & 11 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 3\\ 2 & -2 & -1\\ -8 & 11 & 6\end{pmatrix}$$

2) Consideremos el rectángulo cuyos vértices son: **(0 , 0)** , **(x_0 , 0)** , **(x_0 , f(x_0))** , **(0 , f(x_0))**, tal como indica la figura, donde $0 \le x_0 \le 1$ y $f(x) = 18 - 3x - 8x^2$

a) [2'5 puntos] Calcular el valor de **x_0** para que el área del rectángulo sea máxima. Calcule el área de dicho rectángulo.

b) [1 punto] Calcule el área del recinto encerrado bajo la gráfica de ***f(x)*** entre los valores $0 \le x_0 \le 1$



Los lados del rectángulo son los módulos del vector que tienen como origen el origen de coordenadas y el punto de abcisa **x_0** y ordenada nula, siendo el otro el que une este último punto con el que corta la parábola

$a)$

$$\overrightarrow{Base} = (x_0\ ,0) - (0\ ,0) = (x_0\ ,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{Base}\right| = \sqrt{x_0{}^2 + 0^2} = \sqrt{x_0{}^2} = x_0$$

$$\overrightarrow{Altura} = (x_0\ ,18 - 3x_0 - 8x_0^2) - (x_0\ ,18 - 3x_0 - 8x_0^2) = (0\ ,18 - 3x_0 - 8x_0^2) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{Altura}\right| = \sqrt{0^2 + (18 - 3x_0 - 8x_0^2)^2} = \sqrt{(18 - 3x_0 - 8x_0^2)^2} = 18 - 3x_0 - 8x_0^2$$

$$S = \left|\overrightarrow{Base}\right| \cdot \left|\overrightarrow{Altura}\right| = x_0 \cdot (18 - 3x_0 - 8x_0^2) = 18x_0 - 3x_0^2 - 8x_0^3 \Rightarrow S' = \frac{dS}{dx_0} = 18 - 6x_0 - 24x_0^2 \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow 18 - 6x_0 - 24x_0^2 = 0 \Rightarrow 6 \cdot (3 - x_0 - 4x_0^2) = 0 \Rightarrow 3 - x_0 - 4x_0^2 = 0 \Rightarrow 4x_0^2 + x_0 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 1 + 48 = 49 \ge 0 \Rightarrow x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1+7}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \\ x_0 = \dfrac{-1-7}{8} = -1 \Rightarrow \textit{No es solución} \end{cases}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{dx_0^2} = -6 - 48x_0 \Rightarrow S''\left(\frac{3}{4}\right) = -6 - 48 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = -6 - 36 = -42 < 0 \Rightarrow \textit{Máxino}$$

$$\textit{Puntos} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{4} \\ f(x_0) = 18 - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right) - 8 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 18 - \dfrac{9}{4} - \dfrac{72}{16} = \dfrac{288 - 36 - 72}{16} = \dfrac{180}{16} = \dfrac{45}{4} \end{cases}$$

$b)$

$$A = \int_0^1 (18 - 3x - 8x^2)\,dx = 18 \cdot [x]_0^1 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 = 18 \cdot (1 - 0) - \frac{3}{2} \cdot (1^2 - 0^2) - \frac{8}{3} \cdot (1^3 - 0^3)$$

$$A = 18 - \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{108 - 9 - 16}{6} = \frac{83}{6}\,u^2$$

3) Sean **A**, **B** y **C** los puntos de coordenadas **A = (2 , -1 , 2)**, **B = (1 , 0 , 0)**, **C = (2 , 4 , -3)** y sea r la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

a) [1 punto] Calcule las ecuaciones de la recta que pasa por el punto **A** y por el punto medio del segmento **BC**
b) [1 punto] Calcule el área del triángulo **ABC**
c) [1'25 puntos] Calcule la distancia del punto **C** a la recta **r**

a) Llamando **D** al punto medio del segmento **BC**, la recta **s** quedara determinada por el vector **AD** y uno cualquiera de los dos puntos (**A** o **D**) que lo forman (tomaremos **A**)

$$\begin{cases} x_D = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_D = \frac{0+4}{2} = 2 \\ z_D = \frac{0+(-3)}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right) - (2, -1, 2) = \left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{7}{2}\right) \equiv (1, -6, 7) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 6\lambda \\ z = 2 + 7\lambda \end{cases}$$

b) El área del triángulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) - (2, -1, 2) = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, -3) - (2, -1, 2) = (0, 5, -5) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{k} + 10\vec{i} + 5\vec{j} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{75}$$ c

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{75} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\, u^2$$

) Hallaremos un plano π que conteniendo el punto **C** es perpendicular a la recta **r**, siendo el vector director del plano el de la recta que es perpendicular al vector **CG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y por ello el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano.
Calcularemos el punto **Q** de intersección de la recta **r** y el plano π, el módulo del vector **CQ** es la distancia pedida.

$$2y + x = 2 \Rightarrow x = 2 - 2y \Rightarrow z = 2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (-2, 1, 2) \\ \overrightarrow{CG} = (x, y, z) - (2, 4, -3) = (x-2, y-4, z+3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \Rightarrow (-2, 1, 2) \cdot (x-2, y-4, z+3) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x-2) + (y-4) + 2 \cdot (z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y - 2z - 6 = 0$$

$$Intersección \Rightarrow 2 \cdot (2 - 2\lambda) - \lambda - 2 \cdot 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -9\lambda - 2 = 0 \Rightarrow -9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{9} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \\ y = -\frac{2}{9} \\ z = 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CQ} = \left(\frac{22}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right) - (2, 4, -3) = \left(\frac{4}{9}, \frac{34}{9}, \frac{23}{9}\right) \Rightarrow d(C, r) = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{34}{9}\right)^2 + \left(\frac{23}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{1701}{81}} = \sqrt{21}\, u$$