OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del parámetro ***a***

$$\begin{cases} ax+2ay+az=a+1 \\ x+(a+1)y+(2-a)z=2a \end{cases}$$

a) [1,75 PUNTOS] Calcule los valores de ***a*** para que el sistema tenga solución.
b) [1,5 PUNTOS] Calcule todas las soluciones cuando ***a* = 1** y cuando ***a* = -1**.

a) El sistema no puede ser Compatible Determinado por lo tanto estudiaremos aquellos valores que hagan que hagan que el Sistema sea Compatible Indeterminado en función de una de las incógnitas

$$\begin{cases} ax+2ay=a+1-az \\ x+(a+1)y=2a-(2-a)z \end{cases}$$

Este sistema tendrá soluciones para toda ***a*** que no anule el determinante de las incógnitas ***x*** e ***y***

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2a \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}=a\cdot(a+1-2)=a\cdot(a-1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a-1=0\Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\{0\ ,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=2=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sist.Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Despejando\ \ y$$

$$\begin{cases} ax+az=a+1-2ay \\ x+(2-a)z=2a-(a+1)y \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & 2-a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}=a\cdot(a+1-1)=a^2\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow a^2=0\Rightarrow$$

$$\forall a\in\Re-\{0\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=2=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sist.Compatible\ In\det er\min ado$$

$$b)\ Si\ a=1$$

$$\begin{cases} x+2y=1+1-z \\ x+2y=2-z \end{cases}\Rightarrow\begin{matrix} x+2y=2-z \\ x+2y=2-z \end{matrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2-z \\ 1 & 2 & 2-z \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2-z \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow x+2y=2-z\Rightarrow x=2-2y-z$$

$$Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2-2\lambda-\beta\ ,\ \lambda\ ,\ \beta)$$

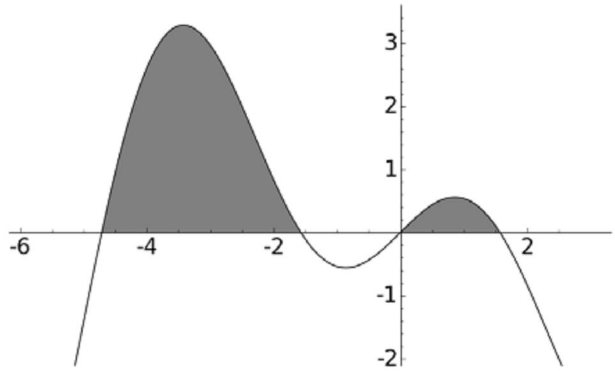
$$\begin{cases} x+z=1+1-2y \\ x+(2-1)z=2-2y \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+z=2-2y \\ x+z=2-2y \end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-2y \\ 1 & 1 & 2-2y \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-2y \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow x+y=2-2y\Rightarrow$$

$$x=2-2y-z\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2-2\lambda-\beta\ ,\ \lambda\ ,\ \beta)$$

2) Considere la función $f(x) = x \cdot \cos x$

a) [2,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de ***f(x)*** y el área encerrada bajo la gráfica de ***f(x)*** que se muestra sombreada en la figura. (Indicación: calcule los puntos de corte de la gráfica de ***f(x)*** con los ejes).

b) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a ***f(x)*** en ***x = 0.***



$a)$

$$F(x) = \int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot sen\ x - \int sen\ x \, dx = x \cdot sen\ x - (-\cos x) = x \cdot sen\ x + \cos x + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = sen\ x \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^o + 180^o k = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte \Rightarrow \begin{cases} Con\ k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi = -4{,}71238898038468985769396507491 93 \\ Con\ k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} = -1{,}5707963267948966192313216916398 \\ x = 0 \\ Con\ k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 0\pi = 1{,}5707963267948966192313216916398 \end{cases}$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx = [x \cdot sen\ x]_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + [x \cdot sen\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1 = \left[-\frac{\pi}{2} \cdot sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) \cdot sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] + \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] = \left[-\frac{\pi}{2} \cdot (-1) + \frac{3\pi}{2} \cdot 1\right] + [0 - 0]$$

$$A_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \ u^2$$

$$A_2 = \left[\frac{\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \cdot sen\ 0\right] + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0\right] = \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 2\pi + \frac{\pi - 2}{2} = \frac{5\pi - 2}{2} u^2$$

$b)$

$$f'(x) = \cos x - x \cdot sen\ x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \cdot \cos 0 = 0 \cdot 1 = 0 \\ m = f'(0) = \cos 0 - 0 \cdot sen\ 0 = 1 - 0 \cdot 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x \Rightarrow$$

$$x - y = 0$$

3) Considere los puntos ***A* = (1 , 1 , 0)** , ***B* = (2 , 1 , 1)**, ***C* = (-1 , 1 , 2)**.
a) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por ***A, B*** y ***C***.
b) [1 PUNTO] Calcule el ángulo que forman las rectas **AB** y **AC**.
c) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo **ABC**.

a) El plano π contiene a los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano; los tres vectores son, por lo tanto coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el volumen del paralelepípedo (el producto mixto de los tres vectores) que forman es nulo y la ecuación del plano que se pide.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,1,1) - (1,1,0) = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,2) - (1,1,0) = (-2,0,2) \equiv (1,0,-1) \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG} \right) \right| = 0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z) - (1,1,0) = (x-1, y-1, z) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y-1) + (y-1) = 0 \Rightarrow 2y - 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv y - 1 = 0$$

$b)$

$$Siendo\ \alpha\ el\ \acute{a}ngulo\ buscado \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC} \right|} = \frac{\left| (1,0,1) \cdot (-2,0,2) \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{|-2+2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}} = \frac{|0|}{2\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = arc \cos 0 = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

c) El área del triángulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2\vec{j} = -4\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,0,4)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 16 \Rightarrow \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8\ u^2$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) El precio de 1 kilo de manzanas, 2 de peras y una docena de huevos es de 5 euros. El precio de 2 kilos de manzanas, 4 kilos de peras y tres docenas de huevos es de 12 euros. El precio de 5 docenas de huevos y 2 kilos de peras es de 11 euros y 50 céntimos.
a) [2 PUNTOS] Calcule el precio del kilo de peras, el kilo de manzanas y la docena de huevos.

b) [1,25 PUNTOS] Pedro ha comprado dos kilos de manzanas y tres kilos de peras. Carmen ha comprado un kilo de manzanas, una docena de huevos y dos kilos de peras. ¿Quién ha gastado más dinero?

a)
Sean M el precio del Kg de manzanas, P el de las peras y H el de la docena de huevos

$$\begin{cases} M+2P+H=5 \\ 2M+4P+3H=12 \\ 2P+5H=11{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} M+2P+H=5 \\ 2M+4P+3H=12 \\ 4P+10H=23 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & 10 & 23 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 10 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow H=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4P+10\cdot 2=23 \Rightarrow 4P+20=23 \Rightarrow 4P=3 \Rightarrow P=\frac{3}{4} \Rightarrow M+2\cdot\frac{3}{4}+2=5 \Rightarrow M=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$Solución \Rightarrow (M\ ,\ P\ ,\ H)=\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 2\right) €$$

$b)$

$$Pedro \Rightarrow 2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\frac{3}{4}=3+\frac{9}{4}=\frac{21}{4}=5'25\ €$$

$$Carmen \Rightarrow 1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{4}+1\cdot 2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2=\frac{10}{2}=5\ €$$

2) Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

a) [1,5 PUNTOS] Calcule su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) [1 PUNTO] Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
c) [1 PUNTO] Haga un esbozo de la gráfica de la función.

$a)$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{(-1)^2+2}{(-1)^2-1}=\dfrac{1+2}{1-1}=\dfrac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución\ en\ \Re \\ x=1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{1^2+2}{1^2-1}=\dfrac{1+2}{1-1}=\dfrac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución\ en\ \Re \end{cases}$$

$$Dom\,(f)=\forall x\in\Re-\{-1\,,1\}$$

$$f'(x)=\frac{2x\,(x^2-1)-2x\,(x^2+2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\,(x^2-1-x^2-2)}{(x^2-1)^2}=\frac{(-6)\,x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$$

$$\frac{(-6)\,x}{(x^2-1)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} -6<0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x>0 \\ (x^2-1)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 2

a) Continuación

	$-\infty$	0 ∞
-6 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 - 1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x \in \Re / x < 0$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re / x > 0$

b)

Máximo relativo en $x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{0^2 + 2}{0^2 - 1} = -2$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Asíntotas verticales
x = -1
x = 1

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 1$, *cuando* $x \to \infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 1$, *cuando* $x \to -\infty$

Asíntotas oblicuas

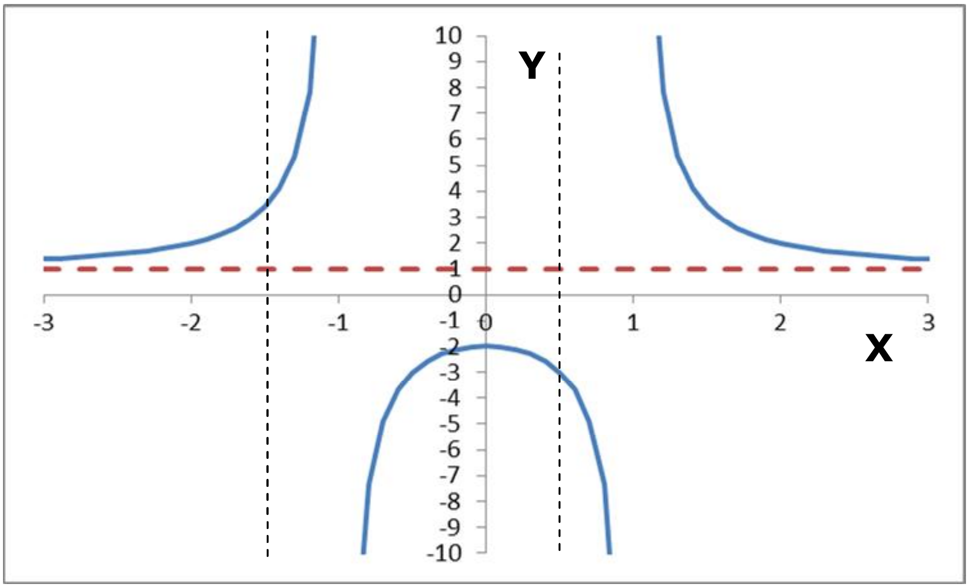
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^3-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to \infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^3-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{-\infty}+\frac{2}{-\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$

c)



3. Considere la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-2y=4 \end{cases}$

a) [1 PUNTO] Determine la ecuación paramétrica de *r*.
b) [1,25 PUNTOS] Calcule el plano ortogonal a *r* que pasa por el punto ***P* = (2 , 4 , 0)** .
c) [1 PUNTO] Calcule la distancia entre ***P*** y ***r***.

$a)$

$$x=4+2y \Rightarrow 4+2y+z=-2 \Rightarrow z=-6-2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-6-2\lambda \end{cases}$$

b) El plano π, perpendicular a r, tiene como vector director el de la recta que es perpendicular, a su vez, al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y el producto escalar de los dos vectores es nulo y la ecuación del plano pedido

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(2\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(2\,,4\,,0)=(x-2\,,y-4\,,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,-2)\cdot(x-2\,,y-4\,,z)=0 \Rightarrow 2\cdot(x-2)+y-4-2z=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-2z-8=0$$

Continuación del problema 3 de la Opción de Examen nº 2

c) Hallaremos el punto de corte **R** de la recta **r** y el plano π hallado perpendicular a ella (el hallado en el apartado anterior b)). El módulo del vector **PR** es la distancia pedida.

$$2\cdot(4+2\lambda)+\lambda-2(-6-2\lambda)-8=0\Rightarrow 8+4\lambda+\lambda+12+4\lambda-8=0\Rightarrow 9\lambda+12=0\Rightarrow \lambda=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}$$

$$R\begin{cases} x=4+2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=-6-2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) \end{cases}\Rightarrow R\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{10}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{PR}=\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{10}{3}\right)-(2,4,0)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{16}{3},-\frac{10}{3}\right)$$

$$d(P,r)=\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{16}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4+256+100}{9}}=\frac{\sqrt{360}}{3}=\frac{6\sqrt{10}}{3}=2\sqrt{10}\ u$$