## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

**1)** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ c & 1 & b\\ -1 & c & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}13\\5\\0\end{pmatrix}$, con **a**, **b** y **c** números reales.

**a) [1,75 PUNTOS]** Calcule los valores de **a**, **b** y **c** para que **AB = C**.
**b) [1,5 PUNTOS]** Calcule la inversa de A cuando **a = 0**, **b = 1**, **c = −1**

$a)$

$$\begin{pmatrix}1 & a & b\\ c & 1 & b\\ -1 & c & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2+a+5b\\2c+1+5b\\-2+c+5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+5b=11\\5b+2c=4\\5a+c=2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 0 & 11\\0 & 5 & 2 & 4\\5 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 0 & 11\\0 & 5 & 2 & 4\\0 & -25 & 1 & -53\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & 0 & 11\\0 & 5 & 2 & 4\\0 & 0 & 11 & -33\end{array}\right)\Rightarrow 11c=-33\Rightarrow c=-\frac{33}{11}=-3\Rightarrow 5b+2\cdot(-3)=4\Rightarrow 5b-6=4\Rightarrow 5b=10\Rightarrow b=\frac{10}{5}=2$$

$$a+5\cdot 2=11\Rightarrow a=1\Rightarrow Solución\Rightarrow (a\ ,\ b\ ,\ c)=(1\ ,\ 2\ ,\ -3)$$

b) Una matriz tiene inversa si su determinante no es nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$ **2)**

Sea la función dada por $f(x)=\begin{cases}-3x+3 & si \quad x<1\\ ax^2+bx+3 & si \quad 1\leq x<3\\ \sqrt{x^2-5} & si \quad 3<x\end{cases}$

**1)** [1 PUNTO] Calcule **a** y **b** para que la función f sea continua en todo R.
**2)** [2,5 PUNTOS] Si **a =1** y **b = 2**, calcule el área encerrada bajo la gráfica de **f(x)** entre las rectas **y = 0**, **x = 0** y **x = 3**
1) Estudiaremos la continuidad de **f** en **x = 1** y **x = 3**

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=(-3)\cdot 1+3=0\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot 1^2+b\cdot 1+3=a+b+3\end{cases}\Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow 3+a+b=0\Rightarrow a+b=-3$$

$$\begin{cases}f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=a\cdot 3^2+b\cdot 3+3=9a+3b+3\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\sqrt{3^2-5}=\sqrt{4}=2\end{cases}\Rightarrow f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\Rightarrow 3+9a+3b=2$$

$$\begin{cases}a+b=-3\\ 9a+3b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-9a-9b=27\\ 9a+3b=-1\end{cases}\Rightarrow -6b=26\Rightarrow b=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}\Rightarrow a-\frac{13}{3}=-3\Rightarrow a=-3+\frac{13}{3}=\frac{4}{3}$$

**Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 1**

2)

$$f(x)=\begin{cases} -3x+3 & si \quad x<1 \\ x^2+2x+3 & si \quad 1\le x<3 \\ \sqrt{x^2-5} & si \quad 3<x \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} -3x+3=0 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \notin (-\infty\ ,1) \\ x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta=2^2-4\cdot1\cdot3=-8<0 \Rightarrow Sin\ puntos\ de\ corte \\ \sqrt{x^2-5}=0 \Rightarrow x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \Rightarrow \notin (3\ ,\infty) \end{cases}$$

$$Si\ x=\frac{1}{2}\in(0\ ,1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-3\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}>0 \Rightarrow f(x)\ es\ positiva$$

$$Si\ x=2\in(1\ ,3) \Rightarrow f(2)=2^2+2\cdot2+3=11>0 \Rightarrow f(x)\ es\ positiva$$

$$A=\int_0^1(-3x+3)\,dx+\int_1^3(x^2+2x+3)\,dx=-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1+3\cdot[x]_0^1+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^3+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^3+3\cdot[x]_1^3$$

$$A=-\frac{3}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)+3\cdot(1-0)+\frac{1}{3}\cdot\left(3^3-1^3\right)+\left(3^2-1^2\right)+3\cdot(3-1)=-\frac{3}{2}+3+\frac{26}{3}+8+6$$

$$A=-\frac{3}{2}+17+\frac{26}{3}=\frac{-9+102+52}{6}=\frac{145}{6}\,u^2$$

**3)** Considere los puntos ***A* = (1 , 1 , 1)** , ***B* = (0 , -1 , 1)** y ***C* = (2 , -1 , 2)** en $\Re^3$

**1) [1,5 PUNTOS]** Calcule **P**, la proyección ortogonal del punto **A** sobre la recta **BC**.

**2) [1 PUNTO]** Calcule la distancia de **A** a la recta **BC**.

**3) [0,75 PUNTOS]** Compruebe que $\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CP}\right|^2-\left|\overrightarrow{PB}\right|^2$ .

1) Hallaremos un plano $\pi$ que conteniendo al punto **A** es perpendicular a la recta **BC**, siendo su vector director el de la recta que es perpendicular al vector **AG**, **G** el punto generador del plano, y cuyo producto escalar es nulo y la ecuación del plano.

La intersección de la recta **BC** con el plano hallado nos determinará el punto **P**

$$\overrightarrow{BC}=(2\ ,-1\ ,\ 2)-(0\ ,-1\ ,\ 1)=(2\ ,0\ ,\ 1) \Rightarrow \overline{BC}=\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-1 \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG}=(x\ ,y\ ,\ z)-(1\ ,1\ ,\ 1)=(x-1\ ,\ y-1\ ,\ z-1) \\ \overrightarrow{BC}=(2\ ,0\ ,\ 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\ ,0\ ,\ 1)\cdot(x-1\ ,\ y-1\ ,\ z-1)=0 \Rightarrow 2\cdot(x-1)+(z-1)=0 \Rightarrow \pi\equiv 2x+z-3=0$$

$$Inter\sec ción \Rightarrow 2\cdot2\lambda+(1+\lambda)-3=0 \Rightarrow 4\lambda+1+\lambda-3=0 \Rightarrow 5\lambda-2=0 \Rightarrow 5\lambda=2 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{5}$$

$$P\begin{cases} x=2\cdot\frac{2}{5} \\ y=-1 \\ z=1+\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{4}{5}\ ,-1\ ,\ \frac{7}{5}\right)$$

2) Es la distancia del punto **A** al punto **P**, o sea el modulo del vector **AP**

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{5}, -2, \frac{2}{5}\right)$$

$$d\left(A, \overline{BC}\right) = d(A, P) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + 4 + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{1+100+4}{25}} = \frac{\sqrt{105}}{5}\ u$$

**3)**

$$\left\{\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -2, 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5} \\
&\overrightarrow{CA} = (1, 1, 1) - (2, -1, 2) = (-1, 2, -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\
&\overrightarrow{CP} = \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) - (2, -1, 2) = \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{45}}{5} \Rightarrow \\
&\overrightarrow{PB} = (0, -1, 1) - \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{5}
\end{aligned}\right.$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{PB}\right|^2 \Rightarrow \left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{45}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{20}}{5}\right)^2 \Rightarrow 6 - 5 = \frac{45}{25} - \frac{20}{25} \Rightarrow 1 = \frac{25}{25}$$

*Igualdad comprobada*

## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

**1)** Considere el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 3a \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**1) [3,25 PUNTOS]** Estudie el comportamiento del sistema dependiendo del valor del parámetro **a** ∈ **R**. Calcule todas sus soluciones cuando el sistema sea compatible.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 3a \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3a \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & 3a \\ -1 & -3a \end{vmatrix} = 2\cdot\left(-3a^2+3a\right) = (-6)\left(a^2-a\right) = (-6)\,a\,(a-1) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow = (-6)\,a\,(a-1) = 0 \Rightarrow a\,(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ a = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Cuando\ es\ Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 3a & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3a & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3a-3a^2 & 1-a \\ 0 & 2 & 1-9a & 2 \\ -1 & 0 & -3a & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(3a-3a^2\right) z = 1-a \Rightarrow 3a\,(1-a)\,z = 1-a \Rightarrow z = \frac{1}{3a} \Rightarrow$$

$$2y + (1-9a)\cdot\frac{1}{3a} = 2 \Rightarrow 2y = 2 - \frac{1-9a}{3a} \Rightarrow 2y = \frac{6a-1+9a}{3a} \Rightarrow y = \frac{15a-1}{6a} \Rightarrow -x - 3a\cdot\frac{1}{3a} = -1 \Rightarrow$$

$$-x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = \left(0\,,\,\frac{15a-1}{6a}\,,\,\frac{1}{3a}\right)$$

**Continuación del problema 1 de la Opción de Examen nº 2**

$$Cuando\ a=1\ es\ Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x+3z=1 \Rightarrow x=1-3z \Rightarrow 2y-8z=2 \Rightarrow 2y=2+8z \Rightarrow y=1+4z \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(1-3\lambda\ ,1+4\lambda\ ,\ \lambda)$$

**2)** Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

**1) [2,5 PUNTOS]** Estudie el dominio de ***f***, corte con los ejes, simetrías respecto del eje **OY**, y respeto del origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y asíntotas de la función **f(x).**

**2)** [1 PUNTO] Dibuje un esbozo de la gráfica de ***f***

1)

$$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4} \Rightarrow Sin\ solución\ en\ \Re \Rightarrow Dom\ (f)=\forall x\in \Re$$

$$Corte\ con\ el\ eje\ OY \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0}{0^2+4}=\frac{0}{4}=0$$

$$Corte\ con\ el\ eje\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\frac{x}{x^2+4} \Rightarrow x=0$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)-2x\cdot x}{(x^2+4)^2}=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$$

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} 2-x>0 \Rightarrow -x>-2 \Rightarrow x<2 \\ 2+x>0 \Rightarrow x>-2 \\ (x^2+4)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+4}=-\frac{x}{x^2+4}=-f(x) \Rightarrow Simétrico\ respecto\ al\ origen$$

| | $-\infty$ **-2** | **-2** **2** | **2** $\infty$ |
|---|---|---|---|
| **x > -2** | **( - )** | **( + )** | **( + )** |
| **x < 2** | **( + )** | **( + )** | **( - )** |
| **$(x^2 + 4)^2 > 0$** | **( + )** | **( + )** | **( + )** |
| **Solución** | **( - )** | **( + )** | **( - )** |

**Creciente** $\forall x\in\Re / -2<x<2$ **Decreciente** $\forall x\in\Re / (x<-2)\cup(x>2)$

**Mínimo relativo** $x=-2 \Rightarrow f(-2)=\dfrac{-2}{(-2)^2+2^2}=-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{4}$ **de Decrecimiento pasa a Crecimiento**

**Máximo relativo** $x=2 \Rightarrow f(2)=\dfrac{2}{2^2+2^2}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$ **de Crecimiento pasa a Decrecimiento**

**Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 2**

**Asíntotas verticales**
No existen asíntotas verticales

**Asíntotas horizontales**

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+4}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$$

$$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+4}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow$$

$$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to-\infty$$

**Asíntotas oblicuas**

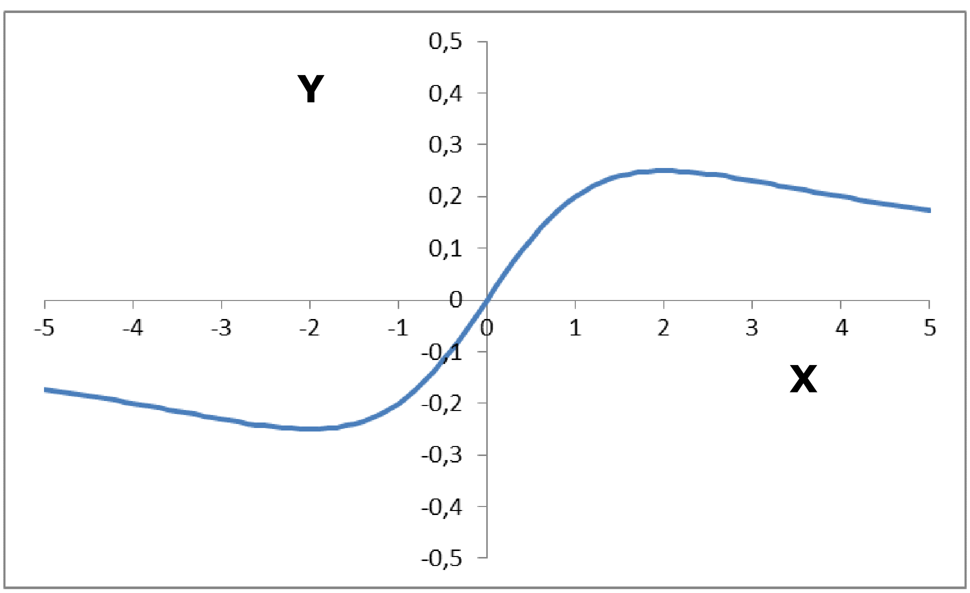
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3+4x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$$No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^3+4x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$$No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to-\infty$$

2)



**3.-** Sean **P = (1 , −1 , 1)** , **Q = (0 , 1 , 3)** , **R = (1 , 2 , 2)** tres puntos de $\mathbf{R}^3$.

**1) [1 PUNTO]** Calcule un vector **v** con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{PQ}$ y con el mismo módulo que $\overrightarrow{QR}$.

**2) [1 PUNTO]** ¿Están los puntos **P**, **Q** y **R** alineados? En caso negativo, calcule el área del triángulo **PQR**.

**3) [1'25 PUNTOS]** Calcule una recta perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ que pase por el punto **R**

1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}=(0,1,3)-(1,-1,1)=(-1,2,2) \\ \overrightarrow{QR}=(1,2,2)-(0,1,3)=(1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

$$Vector\ unitario\ \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{v}=\sqrt{3}\cdot\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) El vector **PQ** es igual o proporcional al vector **PR** si los puntos están alineados

2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}=(-1,2,2) \\ \overrightarrow{PR}=(1,2,2)-(1,-1,1)=(0,3,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{0}\neq\frac{2}{3} \Rightarrow Los\ \ puntos\ no\ están\ alineados$$

El área del triángulo que forman los dos vectores, que tienen el mismo origen, es la mitad del módulo de su producto vectorial

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}\right| \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{k}-6\vec{i}+\vec{j}=-4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{26} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}\right|=A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}=\frac{\sqrt{26}}{2}\,u^2$$

**3)** Se hallará un plano $\pi$ que contenga el punto **R.** que tendrá como vector director el vector **PQ** que al ser perpendicular al vector **RG**, donde **G** es el punto genérico del plano ,siendo el producto escalar de ambos nulo y la ecuación que se quería hallar.
Una vez hallado una recta **s** que tenga como vector director **PQ**, hallaremos su punto de intersección **T** con el plano hallado, el vector **RT** es el director de la recta pedida y con uno de los puntos (**R** o **T**) queda definida la recta **t.**

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}=(-1,2,2) \\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(1,2,2)-=(x-1,y-2,z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{RG} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RG}=0 \Rightarrow$$

$$(-1,2,2)\cdot(x-1,y-2,z-2)=-(x-1)+2\cdot(y-2)+2\cdot(z-2)=0 \Rightarrow -x+2y+2z-7=0 \Rightarrow$$

$$\pi\equiv x-2y-2z+7=0 \Rightarrow$$

$$Inter\sec ción \Rightarrow Siendo \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ}=(-1,2,2) \\ P(1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow (1-\lambda)-2(-1+2\lambda)-2(1+2\lambda)+7=0$$

$$1-\lambda+2-4\lambda-2-4\lambda+7=0 \Rightarrow -9\lambda+8=0 \Rightarrow 9\lambda=8 \Rightarrow \lambda=\frac{8}{9}$$

3) Continuación

$$T\left\{\begin{array}{l} x=1-\dfrac{8}{9} \\ y=-1+2\cdot\dfrac{8}{9} \\ z=1+2\cdot\dfrac{8}{9} \end{array}\right. \Rightarrow T\left(\frac{1}{9}\,,\,\frac{7}{9}\,,\,\frac{25}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{RT}=\left(\frac{1}{9}\,,\,\frac{7}{9}\,,\,\frac{25}{9}\right)-(1\,,\,2\,,\,2)=\left(-\frac{8}{9}\,,-\frac{11}{9}\,,\,\frac{7}{9}\right)\equiv(8\,,11\,,-7)\Rightarrow$$

$$t\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+8\mu \\ y=2+11\mu \\ z=2-7\mu \end{array}\right.$$