

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.- Consideremos la igualdad matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{B}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) [0,25 puntos] ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz \mathbf{M} ?

2) [1'5 puntos] Para qué valores de t es la matriz de \mathbf{A} invertible?

3) [1'5 puntos] En el caso $t = -1$, despeje la matriz \mathbf{M} en función de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} y calcule su valor

1) Como la matriz \mathbf{A} tiene 3 filas y 3 columnas, es de orden 3×3 y la matriz \mathbf{B} tiene 3 filas y 2 columnas, es de orden 3×2 ($3 \times 3 - 3 \times 2 = 3 \times 2$), la matriz \mathbf{M} tiene que ser de orden 3×2 (quedan la primera y la última de los cuatro ordenes enfrentados)

2) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 2 \\ 0 & 3t & 3 \\ 0 & 1+2t & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3t & 3 \\ 1+2t & 3 \end{vmatrix} = 9t - 3 \cdot (1+2t) = 9t - 3 - 6t = 3t - 3 = 3(t-1) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 3(t-1) = 0 \Rightarrow t-1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

3)

$$AM = B \Rightarrow A^{-1}AM = A^{-1}B \Rightarrow IM = A^{-1}B \Rightarrow M = A^{-1}B$$

$$\text{Cuando } t = -1 \Rightarrow |A| = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Sea la función: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

1) [2,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de f . Compruebe la solución obtenida

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y = 0$ y la rectas $x = 0$ y $x = 1$

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{t^2-1}{t} 2t dt = 2 \int (t^2-1) dt = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 - 2t = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1+x)^3} - 2\sqrt{1+x} + K$$

$$1+x = t^2 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2t dt \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot (1+x) \cdot \sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x} + K = 2\sqrt{1+x} \left(\frac{1+x}{3} - 1 \right) + K = 2\sqrt{1+x} \left(\frac{1+x-3}{3} \right) + K$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{1+x} + K$$

Comprobación

$$f(x) = F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left[\sqrt{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} (x-2) \right] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{2 \cdot (1+x) + x - 2}{2\sqrt{1+x}} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2+2x+x-2}{\sqrt{1+x}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sqrt{1+x}}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow \text{Comprobado}$$

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow x = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow \text{Positivo}$$

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left[\frac{2}{3} (x-2) \sqrt{1+x} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} (1-2) \sqrt{1+1} \right] - \left[\frac{2}{3} (0-2) \sqrt{1+0} \right] = -\frac{2}{3} \sqrt{2} - \left(-\frac{4}{3} \right)$$

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3} u^2$$

Ejercicio 3

Sea el punto $P(0, 2, 2)$. Sea r la recta expresada en forma continua $r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$

1) [0,75 PUNTOS] Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta r

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r

3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P

1)

$$r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

2) Hallaremos un plano π que conteniendo a P , sea perpendicular a r (**que es la solución del apartado c**)), el vector director del plano es el de la recta r que es perpendicular al vector \overrightarrow{PG} , siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación del plano buscado. Posteriormente se halla el punto Q intersección de la recta r y el plano π . El módulo del vector \overrightarrow{PQ} es la distancia entre el punto P y la recta r pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (4, 1, 2) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, 2, 2) = (x, y-2, z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4, 1, 2) \cdot (x, y-2, z-2) = 0 \Rightarrow 4x + (y-2) + 2 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow \pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$$

Punto de intersección de π y la recta r

$$4 \cdot (2 + 4\lambda) + \lambda + 2 \cdot (-1 + 2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow 8 + 16\lambda + \lambda - 2 + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 21\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$Q \begin{cases} x = 2 + 4 \cdot 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow Q(2, 0, -1) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -1) - (0, 2, 2) = (2, -2, -3) \Rightarrow$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17} \text{ u}$$

3) Ya hemos resuelto el problema en el apartado 2) $\pi: 4x + y + 2z - 6 = 0$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible

2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas soluciones en caso de que sea compatible indeterminado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot (a-1) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a \cdot (a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determinado}$

Si $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema. Incompatible}$$

Si $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

2)

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow -y - z = -5 \Rightarrow y = 5 - z \Rightarrow x + 5 - z + z = 2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-3, 5 - \lambda, \lambda)$$

Ejercicio 2.- Tenemos la función definida a trozos $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.

3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 6x^2 - 30x + 36 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow 6 \cdot (x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 6 \cdot (x-3) \cdot (x-2) & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \end{cases}$$

	$-\infty$	0
$1 > 0$	(+)	
$(x+1)^2 > 0$	(-)	
Solución	(+)	

Creciente $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

	0	2	3	∞
$6 > 0$	(+)	(+)	(+)	
$x > 2$	(-)	(+)	(+)	
$x > 3$	(-)	(-)	(+)	
Solución	(+)	(-)	(+)	

Creciente $\forall x \in \mathbb{R} / (0 < x < 2) \cup (x > 2)$

Decreciente $\forall x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3$

Máximo relativo en $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 3 = 16 - 60 + 72 + 3 = 31$ de creciente pasa a decreciente

Mínimo relativo en $x = 3 \Rightarrow f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 3 = 54 - 135 + 108 + 3 = 30$ de decreciente pasa a creciente

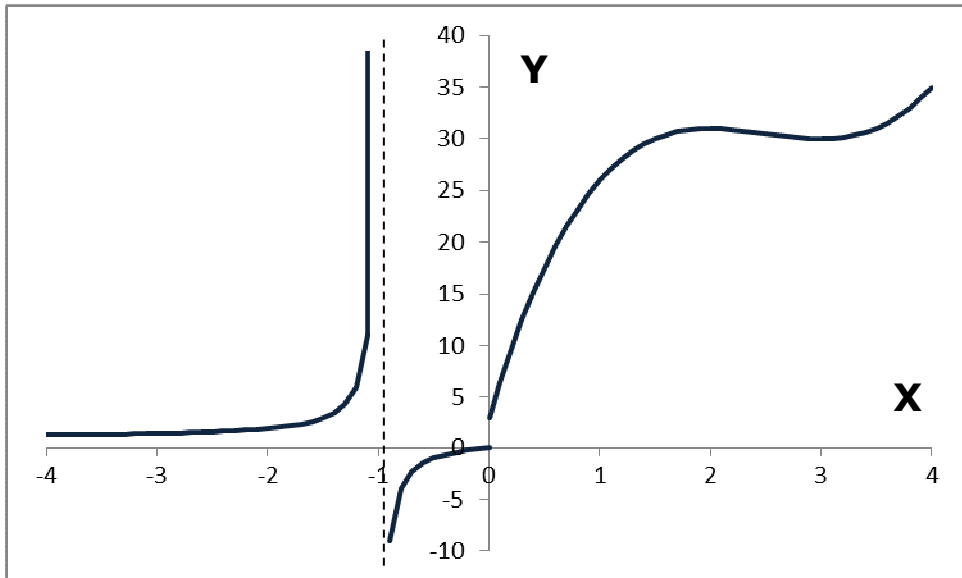
2)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \\ g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2 \cdot 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

La función no es continua en $x = 0$

Continuación Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2

3)



3) Sean $A = (-2, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 0, 2)$ son tres puntos de \mathbb{R}^3

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A , B y C

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta \overline{BC}

3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $\vec{u} = \overline{(3, 0, 1)}$ y $\vec{v} = \overline{(4, -1, 2)}$ son ortogonales

1) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{AG} , siendo G el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y el tetraedro (que se calcula por el producto mixto de los tres vectores) que forman es de volumen nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1, 1, 1) - (-2, 1, 0) = (3, 0, 1) \\ \overline{AC} = (2, 0, 2) - (-2, 1, 0) = (4, -1, 2) \\ \overline{AG} = (x, y, z) - (-2, 1, 0) = (x+2, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4(y-1) - 3z + (x+2) - 6(y-1) - 3z = 0 \Rightarrow (x+2) - 2(y-1) - 3z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0$$

2) La recta r queda definido por el vector \overline{BC} que es su director y por uno cualquiera de los puntos (tomaremos el punto B)

$$\overline{BC} = (2, 0, 2) - (1, 1, 1) = (1, -1, 1) \Rightarrow r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = z - 1$$

3) El área del triángulo **ABC**, es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 0, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (4, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{j} - 3\vec{k} + \vec{i} - 6\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

4) Si los vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 0, 1) \cdot (4, -1, 2) = 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 12 + 0 + 2 = 14 \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \not\perp \vec{v}$$

No son ortogonales