OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de **M** en función del valor de **x.**
2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de **M** en el caso de **x = -1**

$a)$

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -x & x \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & x-1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot x^2 \cdot (x-1)$$

$$Si\ |M| = 0 \Rightarrow -3 \cdot x^2 \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \{0\ ,1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rang\ (M) = 3$$

$Si\ x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (M) = 1$$

$Si\ x = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (M) = 2$$

$b)$

$Si\ m = -1$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-6) = 6 \neq 0 \Rightarrow Existe\ M^{-1} \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot adj\ M^t \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ M^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

1) [2,5 PUNTOS] Calcular el rectángulo de base **x** cm., altura **y** cm. y diagonal $3\sqrt{2}$ cm. cuyo perímetro sea máximo

2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función **h(x) = x² + x** en el punto **(1 , 2)**

1)

$$\begin{cases} x^2+y^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2=18 \Rightarrow x^2=18-y^2 \Rightarrow y=\sqrt{18-x^2} \\ P=2x+2y=2\,(x+y) \end{cases} \Rightarrow P=2\cdot\left(x+\sqrt{18-x^2}\right)\Rightarrow$$

$$P'=\frac{dP}{dx}=2\cdot\left(1+\frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}\right)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{18-x^2}-x}{\sqrt{18-x^2}}\right)\Rightarrow P'=0\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{\sqrt{18-x^2}-x}{\sqrt{18-x^2}}\right)\Rightarrow \sqrt{18-x^2}-x=0\Rightarrow$$

$$\sqrt{18-x^2}=x\Rightarrow 18-x^2=x^2\Rightarrow 2x^2=18\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}\Rightarrow\begin{cases} x=3 \\ x=-3\Rightarrow \textit{No es solución}\end{cases}$$

$$P''=\frac{dP'}{dx}=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{18-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}\cdot x}{18-x^2}\right)=2\cdot\left(-\frac{\frac{18-x^2+x^2}{\sqrt{18-x^2}}}{18-x^2}\right)=\frac{-36}{\left(18-x^2\right)\sqrt{18-x^2}}$$

$$P''(3)=\frac{-36}{\left(18-3^2\right)\sqrt{18-3^2}}=\frac{-36}{9\cdot 3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow \textit{Máximo}\Rightarrow\begin{cases} x=3\,cm \\ y=\sqrt{18-3^2}=3\,cm\end{cases}$$

2)

$$h'(x)=2x+1\Rightarrow\begin{cases} h(1)=2 \\ h'(1)=2\cdot 1+1=3\end{cases}\Rightarrow y-2=3\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=3x-3\Rightarrow y=3x-1\Rightarrow 3x-y-1=0$$

Ejercicio 3

Sean **P: x + 3y + 2z - 1 = 0** y **Q : 2x + 6y + 4z + 3 = 0** dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano **P** de su ecuación general (implícita).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano **P**.

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos **P** y **Q**.

4) 1 PUNTO] Calcule la recta normal a **Q** que pase por **(0 , 0 , 0)**

1)

$$\overrightarrow{v_P}=(1\,,3\,,\;2)$$

2)

$$x=1-3y-2z\Rightarrow\begin{cases} x=1-3\lambda-2\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu\end{cases}$$

3) Los planos pueden ser paralelos o cortarse en una recta a la que definen. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cortarán

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_P}=(1\,,3\,,\;2) \\ \overrightarrow{v_Q}=(2\,,6\,,\;4)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\Rightarrow$$ **Son planos paralelos**

4) La recta **s** tiene como vector director la del plano **Q**

$$\overrightarrow{v_Q}=\overrightarrow{v_Q}=(2\,,6\,,\;4)\equiv(1\,,3\,,\;2)\Rightarrow s\equiv x=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro **t**:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2tx+y+(t+1)z=1 \\ (t-1)x+ty+tz=-2 \end{cases}$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro **t,** calculando todas sus soluciones en los que sea compatible.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t-1 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2t-1 & t \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-t\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -t=0\Rightarrow t=0$$

$$\forall t\in\Re-\{0\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatile\ Determinado$$

$Si\ t=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatile\ Indeterminado$

$Cuando\ t=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow y+z=1\Rightarrow y=1-z\Rightarrow x+(1-z)+z=3\Rightarrow x+1-z+z=3\Rightarrow x=2\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(2\ ,1-\lambda\ ,\ \lambda)$$

$Cuando\ t\neq 0$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \\ -2 & t & t \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & t \\ -2-3t & 0 & 0 \end{vmatrix}}{t}=\frac{(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & t \\ -2-3t & 0 \end{vmatrix}}{t}=\frac{(-1)\cdot t\cdot(-2-3t)}{t}=2+3t$$

Continuación del problema 1 de la Opción de Examen nº 2

2) *Continuación*

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2t & 2 & t+1\\ t-1 & -1 & t\end{vmatrix}}{t}=\frac{\begin{vmatrix}3t-2 & 0 & 1+3t\\ 4t-2 & 0 & 3t+1\\ t-1 & -1 & t\end{vmatrix}}{t}=\frac{-(-1)\begin{vmatrix}3t-2 & 1+3t\\ t-1 & t\end{vmatrix}}{t}=\frac{t\,(3t-2)-(t-1)\cdot(1+3t)}{t}$$

$$y=\frac{3t^2-2t-\left(t+3t^2-1+3t\right)}{t}=\frac{3t^2-2t-3t^2+1-4t}{t}=\frac{1-6t}{t}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2t & 1 & 1\\ t-1 & t & -2\end{vmatrix}}{t}=\frac{\begin{vmatrix}1-2t & 0 & 2\\ 2t & 1 & 1\\ t-1-2t^2 & 0 & -2-t\end{vmatrix}}{t}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix}1-2t & 2\\ -\left(2t^2-t+1\right) & -(2+t)\end{vmatrix}}{t}=\frac{(2t-1)\cdot(2+t)+2\left(2t^2-t+1\right)}{t}$$

$$z=\frac{4t-2+2t^2-t+4t^2+t-1}{t}=\frac{6t^2+4t-3}{t}$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(2+3t\ ,\ \frac{1-6t}{t}\ ,\ \frac{6t^2+4t-3}{t}\right)$$

Ejercicio 2

Sea **f** la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} ax^2+x+3 & si \quad x\le 3\\ 2x^2-3 & si \quad 3<x<5\\ be^x & si \quad x\ge 5\end{cases}$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de **a** y **b** para que la función sea continua en toda $\Re$
2) [1 PUNTO] Si **a = 1** y **b = 3**, calcule el área encerrada bajo la gráfica de ***f*** comprendido entre las rectas **x = -1** y **x = 3**
3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función **f(x) = x² + x +3**

1)

$$\begin{cases}\begin{cases} f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=a\cdot 3^2+3+3=6+9a\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2\cdot 3^2-3=15\end{cases} \Rightarrow f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\Rightarrow 6+9a=15\Rightarrow 9a=9\Rightarrow a=1\\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=2\cdot 5^2-3=47\\ f(5)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=b\cdot e^5\end{cases} \Rightarrow f(5)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)\Rightarrow b\cdot e^5=47\Rightarrow b=\frac{47}{e^5}\end{cases}$$

Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 2

2)

$f(x) = x^2 + x + 3 \quad si \quad x \leq 3$

$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow No\ hay\ puntos$

$x = 1 \in (-1, 3) \Rightarrow f(1) = 1^2 + 1 + 3 = 5 > 0$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(x^2 + x + 3\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{-1}^{3} + \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-1}^{3} + 3 \cdot \left[x\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3} \cdot \left[3^3 - (-1)^3\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[3^2 - (-1)^2\right] + 3 \cdot \left[3 - (-1)\right]$$

$$A = \int_{-1}^{3} \left(x^2 + x + 3\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[27 - (-1)\right] + \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) + 3 \cdot 4 = \frac{28}{3} + 4 + 12 = \frac{28 + 12 + 36}{3} = \frac{76}{3}\, u^2$$

3)

$f(x) = x^2 + x + 3.$

Los extremos relativos verifican f '(x) = 0.

De f '(x) = 2x + 1 = 0 $\Rightarrow$ x = $-\frac{1}{2}$, posible extremo relativo.

Como f ''(x) = 2 y f ''(-1/2) = 2 > 0, x = $-\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo. (El vértice de la parábola)

Ejercicio 3.-

Sea Q el plano de ecuación vectorial **Q: (0 , 0 , 1) +** $s\,\overrightarrow{(2\,,1\,,0)}+t\,\overrightarrow{(2\,,-1\,,1)}$

1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano **Q**
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por **(-1 , 2 , 4)** que sea perpendicular al plano **Q**
3) [1,25 PUNTOS] Calcule la distancia del punto **(-1 , 2 , 4)** al plano **Q**

1)

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x-2\cdot(z-1)-2\cdot(z-1)-2y=0 \Rightarrow Q \equiv x-2y-4z+4=0$$

2) La recta **r** tiene como vector director el del plano, con el punto **Q** queda definida

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_Q}=(1\,,-2\,,-4) \Rightarrow r \equiv x+1=\frac{y-2}{-2}=\frac{y-4}{-4}$$

3) Hallaremos el punto de intersección **P** entre el plano **Q** y la recta **r** perpendicular a él (hallada en el apartado anterior). El módulo del vector **PQ** es la distancia pedida

$$r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-4\lambda \end{cases} \Rightarrow (-1+\lambda)-2\cdot(2-2\lambda)-4\cdot(4-4\lambda)+4=0 \Rightarrow -1+\lambda-4+4\lambda-16+16\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$21\lambda-17=0 \Rightarrow 21\lambda=17 \Rightarrow \lambda=\frac{17}{21} \Rightarrow P\begin{cases} x=-1+\frac{17}{21} \\ y=2-2\cdot\frac{17}{21} \\ z=4-4\cdot\frac{17}{21} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{4}{21}\,,\frac{8}{21}\,,\frac{16}{21}\right) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left[-1-\left(-\frac{4}{21}\right)\right]^2+\left[2-\left(\frac{8}{21}\right)\right]^2+\left[4-\left(\frac{16}{21}\right)\right]^2}=\sqrt{\left(-\frac{17}{21}\right)^2+\left(\frac{34}{21}\right)^2+\left(\frac{68}{21}\right)^2}$$

$$d(r\,,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{\sqrt{289+1156+4624}}{21}=\frac{\sqrt{6069}}{21}\,u$$