

## OPCIÓN DE EXAMEN N° 1

**Ejercicio 1.-** Sean  $x, y, z$  números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**1) [2 PUNTOS]** Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas  $x, y, z$  que resuelvan el problema matricial  $AB = C$  y calcule todas sus soluciones.

**2) [1,25 PUNTOS]** Si  $x = 0, y = 0$ , calcule para qué valores de  $z$  la matriz  $A$  tiene rango 2.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-2+x \\ 2+y-z \\ 2(x+z)+y-z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z-2=-2 \\ y-z+2=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z \\ z & z \end{vmatrix} = 2 \cdot (z+z^2) \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow 2 \cdot (z+z^2) = 0 \Rightarrow z+z^2 = 0 \Rightarrow z \cdot (1+z) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z=0 \\ z+1=0 \Rightarrow z=-1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Con  $z = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Con  $z = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

**Ejercicio 2.-** Sea la función:  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$

1) [2,5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de  $f(x)$ .

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por  $f(x)$  y la rectas  $y = 0$ ,  $x = 3$  y  $x = 4$

a)

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+3}{2} = 5 \\ x = \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{x-1}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5) + B(x-2)}{(x-2)(x-5)}$$

$$A(x-5) + B(x-2) = x-1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Siendo } x=2 \Rightarrow A(2-5) + B(2-2) = 2-1 \Rightarrow -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ \text{Siendo } x=5 \Rightarrow A(5-5) + B(5-2) = 5-1 \Rightarrow 3B = 4 \Rightarrow B = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{-\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{4}{3}}{x-5} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x-5} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{4}{3} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3} \ln t + \frac{4}{3} \ln u = \frac{1}{3} (4 \ln u - \ln t)$$

$$\begin{cases} x-2 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-5 = u \Rightarrow dx = du \end{cases}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = \frac{1}{3} (\ln u^4 - \ln t) = \frac{1}{3} \ln \frac{u^4}{t} = \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^4}{x-5}} + K$$

b)

Puntos de corte con OX  $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-7x+10} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (3, 4)$

$$\frac{7}{2} \in (3, 4) \Rightarrow f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\frac{7}{2} - 1}{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + 10} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{49-98+40}{4}} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{9}{4}} = -\frac{10}{9} < 0$$

$$A = \left| \int_3^4 \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx \right| = \int_4^3 \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx = \left[ \ln \sqrt[3]{\frac{(x-2)^4}{x-5}} \right]_4^3 = \ln \sqrt[3]{\frac{(3-2)^4}{3-5}} - \ln \sqrt[3]{\frac{(4-2)^4}{4-5}}$$

$$A = \left| \int_3^4 \frac{x-1}{x^2-7x+10} dx \right| = \ln \frac{\sqrt[3]{\frac{1^4}{-2}}}{\sqrt[3]{\frac{2^4}{-1}}} = \ln \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{16}{-1}}} = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{32}}$$

### Ejercicio 3

Tenemos la recta  $r: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi: 3x - y = 2$

1) [1 PUNTO] Demuestre que  $r$  y  $\pi$  son paralelos.

2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a  $r$  contenida en  $\pi$ .

3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de  $r$  a  $\pi$ .

4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta  $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$ ?

1.- Para que la recta y el plano sean paralelos el vector director de la recta  $r$  es perpendicular al vector director del plano  $\pi$ , y su producto escalar es nulo

$$z = 2x \Rightarrow x - y + 2x = 1 \Rightarrow y = -1 + 3x \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 3, 2) \\ \vec{v}_\pi = (3, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (1, 3, 2) \cdot (3, -1, 0) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi$$

Demostrado que  $r$  y  $\pi$  son paralelos

2) El vector director de la recta  $t$ , paralela a la recta  $r$ , es el vector de esta recta, hallaremos un punto  $P$  que pertenece al plano y con ello tenemos la ecuación de la recta pedida

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 3, 2) \\ \text{Si } x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 - y = 2 \Rightarrow y = 6 - 2 = 4 \Rightarrow P(2, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow t: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{2}$$

3) Hallaremos la distancia entre un punto cualquiera de la recta  $r$  (tomaremos el punto  $R$  determinado en su ecuación) al plano  $\pi$  que será la distancia pedida

$$\text{Siendo } \begin{cases} R = (0, -1, 0) \\ \pi: 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow d(\pi, r) = d(\pi, R) = \frac{|3 \cdot 0 - (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} u$$

4)

$$\vec{v}_s = (3, 2, 2)$$

## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro  $b \in \mathfrak{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro  $b$ .

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso  $b = -2$

a) Para que haya compatibilidad el rango de la matriz ampliada tiene que ser nula

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 0 \\ 0 & 2-b \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = (b+2)(2-b) \Rightarrow \text{Si } |A/B| = 0 \Rightarrow (b+2)(2-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b+2=0 \Rightarrow b=-2 \\ 2-b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

$\forall b \in \mathfrak{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow \text{Sistema. Incompatible}$

Si  $b = -2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$$

Número de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema. Compatible Determinado

Si  $b = 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \text{rang}(A) = 4 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema. Incompatible}$

2)

Si  $b = -2 \Rightarrow$  Sistema. Compatible Determinado

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow -y - 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow -x + 1 = 0$$

Solución  $\Rightarrow (x, y, z) = (-1, -1, 0)$

**Ejercicio 2.-** Se quiere construir un cilindro de volumen  $250 \cdot \pi$  metros cúbicos y área mínima.

1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura  $h$  del cilindro en función del radio  $r$  de la base.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función  $a(r)$  que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.

3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ , área del cilindro:  $2A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

a)

$$250\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{250\pi}{\pi \cdot r^2} = \frac{250}{r^2}$$

b)

$$A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{250}{r^2} = 2\pi \cdot \left( r^2 + \frac{250}{r} \right) = 2\pi \cdot \left( \frac{r^3 + 250}{r} \right) \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dr} = 2\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r - (r^3 + 250)}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{3r^3 - r^3 - 250}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{2r^3 - 250}{r^2} \Rightarrow$$

$$A' = 0 \Rightarrow 4\pi \cdot \frac{r^3 - 125}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$A'' = \frac{dA'}{dr} = 4\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r^2 - 2r(r^3 - 125)}{r^4} = 4\pi \cdot \frac{3r^3 - 2r^3 + 250}{r^3} = 4\pi \cdot \frac{r^3 + 250}{r^3} \Rightarrow$$

$$A''(5) = 4\pi \cdot \frac{5^3 + 250}{5^3} = 4\pi \cdot \frac{375}{125} = 12\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} r = 5 \text{ cm} \\ h = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

3) Sean  $r$  y  $s$  las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathfrak{R} \quad s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de  $r$  y  $s$ .

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre  $r$  y  $s$ .

3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a  $s$  que pasa por  $(0, 1, 0)$ .

1) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\left\{ \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 3\lambda \\ 2t = \lambda \\ -2 + 3t = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ 2t - \lambda = 0 \\ 3t + 2\lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$\text{Las rectas son paralelas o se cruzan} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (3, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{3} \neq \frac{2}{1}$$

Las recta  $r$  y  $s$  se cruzan en el espacio

### Continuación del Ejercicio 3 de la opción A

2) Hallamos un plano  $\pi$  que contenga a la recta  $s$  y que sea paralelo a la recta  $r$ .

Para ello disponemos de los vectores directores de las rectas  $r$  y  $s$  que serán perpendiculares al vector director del plano  $\pi$  que es el producto vectorial de ambos vectores; este vector es perpendicular al vector  $SG$ , siendo  $S$  un punto cualquiera de la recta  $s$  (tomaremos el indicado en su ecuación) y  $G$  el punto genérico del plano, y el producto escalar de ellos es nulo y la ecuación pedida del plano  $\pi$ .

La distancia entre un punto cualquiera  $R$  de la recta  $r$  (tomaremos el indicado en su ecuación) y el plano  $\pi$  es la distancia pedida.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (3, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} - 3\vec{i} = -7\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_\pi = (-7, 9, -6)$$

$$\text{Siendo } S(1, 0, -1) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\pi = (-7, 9, -6) \\ \vec{SG} = (x, y, z) - (1, 0, -1) = (x-1, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{SG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{SG} = 0$$

$$(-7, 9, -6) \cdot (x-1, y, z+1) = 0 \Rightarrow -7x + 7 + 9y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 7x - 9y + 6z - 1 = 0$$

$$\text{Siendo } R(1, 0, -2) \Rightarrow d(r, s) = d(R, \pi) = \frac{|7 \cdot 1 - 9 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2}} = \frac{|7 - 12 - 1|}{\sqrt{49 + 81 + 36}} = \frac{|-6|}{\sqrt{166}} = \frac{6\sqrt{166}}{166}$$

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{166}}{83} u$$

3) El plano  $\beta$  queda determinado por el vector director de la recta  $s$ , que es su vector director, y por el vector  $PG$ , siendo  $P$  el punto dado y  $G$  el punto genérico del plano, ambos son perpendiculares y su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \vec{PG} = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x, y-1, z) \\ \vec{v}_\pi = \vec{v}_s = (3, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{PG} \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{PG} \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (3, 1, -2) \cdot (x, y-1, z) = 0$$

$$3x + y - 1 - 2z = 0 \Rightarrow \beta \equiv 3x + y - 2z - 1 = 0$$