## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

**Ejercicio 1.-**

Considere el sistema dependiente del parámetro **m:** $\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

**1) [1 PUNTO]** Clasifique el sistema en función de **m**.
**2) [2,25 PUNTOS]** Calcule todas las soluciones en los casos en que el sistema sea compatible

$a)$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix} = (-m)\cdot \begin{vmatrix} -1 & m \\ 1 & -2m \end{vmatrix} = (-m)\cdot(2m-m) = -m^2 \Rightarrow Si\ |M| = 0 \Rightarrow -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$\forall x \in \Re - \{0\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rang\ (M) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatile\ Deter\min ado$$

$Si\ x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (M) = 2 \neq rang\ (M/N) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatile$$

$2)$

$Si\ x \neq 0 \Rightarrow Sistema\ Compatile\ Deter\min ado$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 3 & -2m & 0 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-m)\cdot \begin{vmatrix} -2 & m \\ 3 & -2m \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{4m-3m}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ m & 0 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-m)\cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{-3-2}{m} = -\frac{5}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -2m & 3 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ 0 & 1+m^2 & -2m \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1+m^2 & -2m \\ -m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{1+m^2-2m^2}{m^2} = \frac{1-m^2}{m^2}$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(1\ ,\ -\frac{5}{m}\ ,\ \frac{1-m^2}{m^2}\right)$$

**Ejercicio 2**

**1) [2,5 PUNTOS]** Calcule el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$ (**ln** denota logaritmo neperiano)

**2) [1 PUNTO]** ¿Para qué valor de **d** tiene la función $\dfrac{x^d-1}{x-2}$ tiene una asíntota oblicua en $+\infty$ ?. Calcule dicha asíntota

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}=\frac{sen\left(2\cdot 0^2\right)+0}{\ln\left(0+1\right)+0}=\frac{sen\ 0}{\ln 1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos\left(2x^2\right)+1}{\frac{1}{x+1}+1}=$$

$$=\frac{4\cdot 0\cdot\cos\left(2\cdot 0^2\right)+1}{\frac{1}{0+1}+1}=\frac{4\cdot 0\cdot\cos\left(0\right)+1}{1+1}=\frac{4\cdot 0\cdot 1+1}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

2)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^d-1}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^d-1}{x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^d}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^d}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\frac{x^d}{x^2}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{\frac{x^d}{x^2}-0}{1-0}\Rightarrow$$

$$\frac{x^d}{x^2}=1\Rightarrow x^d=x^2\Rightarrow d=2\Rightarrow m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-1}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+2x}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+2\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}+2}{1-\frac{2}{x}}=\frac{-\frac{1}{\infty}+2}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0+2}{1-0}=2\Rightarrow \textit{Asíntota oblicua}\Rightarrow y=x+2$$

**Ejercicio 3**

Sean **A** y **B** los planos $A:\left(0\,,1\,,0\right)+t\,\overrightarrow{\left(1\,,-1\,,2\right)}+s\,\left(0\,,0\,,1\right)\quad t,s\in\Re\quad B:x+2y+2z=1$

**1) [1 PUNTO]** Calcule ecuación implícita (general) del plano **A**.
**3) [1 PUNTO]** Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de **A** y **B**.
**4) 1 PUNTO]** Calcule el ángulo formado por los planos **A** y **B**

1)

$$A\equiv\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-x-\left(y-1\right)\Rightarrow A\equiv x+y-1=0$$

**Continuación del problema 3 de la Opción de Examen nº 1**

**2)** Los planos pueden ser paralelos o cortarse en una recta a la que definen. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cortarán

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_A} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_B} = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow Se\ cortan\ según\ una\ recta \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y + 2z = 0 \Rightarrow y = 2z \Rightarrow x + 2z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-2, 2, 1) \\ Punto \Rightarrow R(1, 0, 0) \end{cases}$$

**3)** El coseno del ángulo $\alpha$ que forman los planos es el cociente entre el producto escalar de los dos vectores directores de ambos y el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_A} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_B} = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow Se\ cortan\ según\ una\ recta$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_A} \cdot \overrightarrow{v_B}\right|}{\left|\overrightarrow{v_A}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_B}\right|} = \frac{\left|(1, 1, 0) \cdot (1, 2, 2)\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\left|1 + 2 + 0\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}\ rad$$

## OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

**Ejercicio 1**

Sean $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}$, $con\ x,y\in\Re$

**1) [1,25 PUNTOS]** Determine los valores de **x**, **y** para los cuales **AB = BA**
**2) [1,5 PUNTOS]** Determine un valor **x** para el que **$A^2$ = 6A**.¿Tiene **A** inverso en este caso?
**3) [0,5 PUNTOS]** Sean **N, R, S , X** matrices **2 x 2** que tienen, todas, matriz inversa. Despeja la matriz **X** de la expresión **N.X.R = S**

**1)**

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3+y & 4\\ x+3y & x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x & 4\\ 3y+x & y+3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3+y=3+x\Rightarrow x=y\\ 4=4\\ x+3y=3y+x\Rightarrow 0=0\\ 3y+x=y+3\end{cases}\Rightarrow$$

$$3x+x=x+3\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

2)

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}9+x & 6\\ 6x & x+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6x & 18\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}9+x=18\Rightarrow x=9\\ 6=6\\ 6x=6x\\ x+9=18\end{cases}\Rightarrow x=9$$

**Una matriz tiene inversa si su determinante no es nulo**

$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=9-9=0$. **A no tiene inversa cuando x = 9**

3)

$$N^{-1}N\cdot X\cdot R=N^{-1}\cdot S\Rightarrow I\cdot X\cdot R=N^{-1}\cdot S\Rightarrow X\cdot R=N^{-1}\cdot S\Rightarrow X\cdot R\cdot R^{-1}=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}\Rightarrow$$

$$X\cdot I=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}\Rightarrow X=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}$$

**Ejercicio 2**

Sea **f** la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}x+2 & si\quad x\le -2\\ x^2+ax & si\quad -2<x<0\\ 2\cdot sen(x)+b & si\quad x\ge 0\end{cases}$

**1) [1 PUNTO]** Determine **a** y b para que la función ***f*** sea continua en toda $\Re$
**2) [1,5 PUNTOS]** Si **a = 3** y **b = 0**, clasifique la discontinuidad en **x = -2**
**3) [1 PUNTO]** Si **a = 2** y **b = 0**, calcule el área encerrado por la gráfica de ***f*** entre las rectas **y = 0**, **x = -5** y **x = -3**

$$\begin{cases}\begin{cases}f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-2+2=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=(-2)^2+a\cdot(-2)=4-2a\end{cases}\Rightarrow f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)\Rightarrow 4-2a=0\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2\\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0^2+a\cdot 0=0\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2\cdot sen(0)+b=0+b=b\end{cases}\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow b=0\end{cases}$$

**Continuación del Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2**

2)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\le -2 \\ x^2+3x & si \quad -2<x<0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-2+2=0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=(-2)^2+3\cdot(-2)=4-6=-2 \end{cases} \Rightarrow 0\neq -2$$

En **x = - 2** hay una **discontinuidad inevitable**

3)

$$f(x)=x+2$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0\Rightarrow 0=x+2\Rightarrow x=-2$$

$$-4\in(-5\,,-3)\Rightarrow f(-4)=(-4)+2=-2<0\Rightarrow f(x)<0$$

$$A=\left|\int_{-5}^{-3}(x+2)\,dx\right|=\int_{-3}^{-5}(x+2)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-3}^{-5}+2\cdot\left[x\right]_{-3}^{-5}=\frac{1}{2}\cdot\left[(-5)^2-(-3)^2\right]+2\cdot\left[(-5)-(-3)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot(25-9)+2\cdot(-5+3)=\frac{16}{2}+2\cdot(-2)=8-4=4\,u^2$$

**Ejercicio 3**

Sean el punto **A = (4 , 0 , 1)** y la recta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

**1) [1,75 PUNTOS]** Calcule el plano perpendicular a **r** y que pase por el punto **A**
**2) [1,25 PUNTOS]** Calcule la ecuación general (implícita) que contiene a **r** y a **A**

1) El vector director del plano $\pi$ es el de la recta r, que es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y su producto escalar nulo y la ecuación pedida del plano

$$x=2\Rightarrow y=2+z\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(4\,,0\,,1)=(x-4\,,\,y\,,\,z-1) \end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{AG}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AG}=0\Rightarrow(0\,,1\,,1)\cdot(x-4\,,\,y\,,\,z-1)=0\Rightarrow\pi\equiv y+z-1=0$$

3) El plano $\beta$ queda determinado por el vector director de la recta **r,** el vector **AR,** siendo **R** un punto cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y el vector **AG** ya definido. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que forman) es nulo y la ecuación pedida.

$$Siendo\ R(2\,,2\,,0)\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AR}=(2\,,2\,,0)-(4\,,0\,,1)=(-2\,,2\,,-1)\equiv(2\,,-2\,,1)\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\left|\overrightarrow{AR}\wedge\overrightarrow{AG}\right|=0 \\ \overrightarrow{AG}=(x-4\,,\,y\,,\,z-1) \end{cases}$$

$$\beta\equiv\begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow x-4+2y-2\cdot(z-1)+2\cdot(x-4)=0\Rightarrow\beta\equiv 3x+2y-2z-10=0$$