PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JULIO – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que porten información

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de m el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y-z=m \\ 6x+6y+m^2z=-9 \end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resolvedlo en el caso de que sea compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 6 & 6 & m^2 & -9 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix}=4m^2-18+24-12+24-6m^2=-2m^2+18=0;$$

$m^2-9=0 \Rightarrow m_1=-3, m_2=3.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq -3 \\ m\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=-3 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = -36 - 54 + 72 + 54 = 36 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$$

$$\underline{Para\ m = -3 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ m = 3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = -36 + 54 - 72 + 54 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 27 + 36 - 81 + 18 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ m = 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m = 3$ el sistema es $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 6x + 6y + 9z = -9 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para resolverlo se desprecia una ecuación (tercera) y se hace, por ejemplo $x = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} 3y + 2z = -4\lambda \\ y - z = 3 - 2\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3y + 2z = -4\lambda \\ 2y - 2z = 6 - 4\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 5y = 6 - 8\lambda;\ \ y = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}\lambda.$$

$$z = y - 3 + 2\lambda = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}\lambda - 3 + 2\lambda = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \lambda,\ \ y = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}\lambda,\ \ z = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}\lambda.}$$

****

2º) Calcule los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y haz un esbozo de su gráfica para valores de x entre 3 $y - 3$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 3. \qquad f''(x) = 6x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$f''(-1) = -0 < 0 \ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-1, 0)}.$

$f''(1) = 6 > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: B(1, -4)}.$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es polinómica es continua en su dominio, que es R, por lo cual, del máximo y mínimo relativos se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

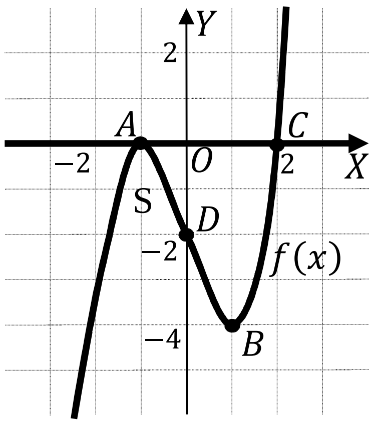
$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 1)}.$$

La función $f(x) = x^3 - 3x - 2$ se anula para $x_1 = x_2 = -1\ y\ x_3 = 2$, por lo que los puntos de corte con el eje de abscisas son $A(-1, 0)\ y\ C(2, 0)$.

El punto de corte con el eje de ordenadas es $D(0, -2)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



****

3º) Determine un plano π que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ y también paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(1,1,0)$ y $B(0,1,1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda; \;\; y=2-\lambda; \;\; x=1-y=1-2+\lambda=-1+\lambda \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$.

Los puntos A y B determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(0,1,1)-(1,1,0)]=(-1,0,1).$$

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(O;\, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0;\; -x-y-z-y=0.$$

$$\underline{\pi \equiv x+2y+z=0}.$$

****

4º) El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad es modelo de una distribución normal de media $\mu = 85\ kg$ y desviación típica $\sigma = 15\ kg$. Se pide:

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población tiene sobrepeso? Se entiende que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si su peso es mayor de 100 kg.

$b)$ Se considera el colectivo de individuos más delgados de la comunidad. Si este colectivo constituye el 40 % de los individuos de la comunidad, ¿cuál es el peso máximo de un individuo del colectivo de los más delgados?

$a)$

$Datos$: $\mu = 85$; $\sigma = 15$.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(85;\ 15)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-85}{15}$.

$P = P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100-85}{15}\right) = P\left(Z > \frac{15}{15}\right) = P(Z > 1) =$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$

$\underline{Tiene\ sobrepeso\ el\ 15{,}87\ \%\ de\ la\ población.}$

$b)$

Por ser la probabilidad menor de 0,5 la expresión $\frac{A-85}{15}$ es negativa, por lo cual:

$P\left(Z \leq \frac{A-85}{15} = y\right) = 0{,}4 \Rightarrow -y = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de manera inversa, a 0,6 le corresponde, aproximadamente 0,255, por lo cual:

$-\frac{A-85}{15} = 0{,}255;\ -A + 85 = 3{,}825 \Rightarrow A = 85 - 3{,}825 = 81{,}175.$

$\underline{El\ peso\ máximo, aproximado, del\ 40\ \%\ de\ delgados\ es\ de\ 81\ kg.}$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera las matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y los vectores $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\ y\ \vec{d}=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$.

Calcular x, y, z para que se verifique: $A\cdot\vec{b}-2\vec{c}=\vec{d}$.

$$A\cdot\vec{b}-2\vec{c}=\vec{d} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2x+y\\ x+2y\\ x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix};$$

$\begin{pmatrix}2x+y-2\\ x+2y-2\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+y-z=2\\ x+2y-z=2\\ x-z=0\end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-4+2}{-4-1+2+1}=\frac{-2}{-2}=1. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4-2+2+2}{-2}=\frac{-2}{-2}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{-2}=\frac{2-4}{-2}=\frac{-2}{-2}=1.$$

$\underline{Solución: x=y=z=1}$.

****

2º) Consideremos la región delimitada por la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x=-1\ y\ x=1$. Haga un esbozo de la región dada y calcule su área.

Por ser $f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$, la función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x^2}=0 \Rightarrow$ El eje X es asíntota horizontal de la función.

Por ser $1+x^2\neq 0, \forall x\in R$, la función no tiene asíntotas verticales.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

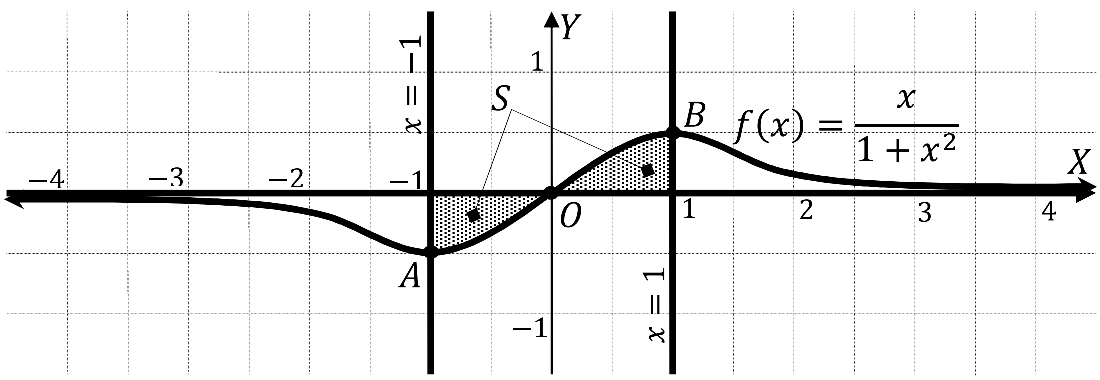
$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0;\ 1-x^2=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x\cdot(1+x^2)-4x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=$$

$$=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$



$$f''(-1)=\frac{-2\cdot(-2)}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow Mínimo\ para\ x=-1.$$

$$f(-1)=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ Mínimo:\ A\left(-1,-\frac{1}{2}\right).$$

Por simetría con respecto al origen: $Máximo$: $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Teniendo en cuanta la simetría de la función, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1 + x^2 = t \\ 2x \cdot dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot dx = [Lt]_1^2 = L2 - L1 = L2 - 0 = L2.$$

$$\underline{S = L2\ u^2 \cong 0{,}69\ u^2}.$$

****

3º) Consideremos los puntos $A(0,0,0), B(1,1,0)\ y\ C(0,1,1)$. Calcula el área del triángulo que determinan estos puntos y determina el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

Los puntos $A(0,0,0), B(1,1,0)\ y\ C(0,1,1)$ forman los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,0) - (0,0,0)] = (1,1,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,1) - (0,0,0)] = (0,1,1)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |i + k - j| = \frac{1}{2} \cdot |i - j + k| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2.}$$

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1,1,0) \cdot (0,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

$$\underline{Los\ vectores\ \overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}\ forman\ un\ ángulo\ de\ 60°.}$$

****

4º) Se ha hecho un estudio sobre el miedo de volar y el nivel de estrés en cierta comunidad. Nos dicen que el 60 % de los individuos no tienen miedo de volar, el 50 % tiene un nivel bajo de estrés, el 25 %, un nivel medio, y el 5 % tiene un nivel alto de estrés y miedo de volar. Sabiendo, además, que el 5 % de los individuos tiene un nivel medio de estrés y no tiene miedo a volar, se pide:

a) Probabilidad que un individuo de la comunidad tenga un nivel medio de estrés y miedo de volar.

b) Sabiendo que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés?

c) ¿Son independientes los eventos "nivel bajo de estrés" y "miedo a volar". Razonar la respuesta.

La tabla de contingencia que se deduce del enunciado es la siguiente:

Miedo a volar	Nivel de estrés			Total
	Bajo	Medio	Alto	
Si			0,05	
No		0,05		0,6
Total	0,5	0,25		1

Completando la tabla de contingencia:

Miedo a volar	Nivel de estrés			Total
	Bajo	Medio	Alto	
Si	$\mathbf{0,15}$	$\mathbf{0,20}$	0,05	$\mathbf{0,40}$
No	$\mathbf{0,35}$	0,05	$\mathbf{0,20}$	0,60
Total	0,50	0,25	$\mathbf{0,25}$	1

Ahora se contestan las preguntas:

a)

$$P = P(Nm \cap M) = \underline{0{,}2}.$$

b)

$$P = P(Nb/M) = \frac{P(M \cap Nb)}{P(M)} = \frac{0{,}15}{0{,}40} = \underline{0{,}375}.$$

c)

Dos sucesos Nb y M son independientes cuando $P(Nb \cap M) = P(Nb) \cdot P(M)$:

$$P(Nb) \cdot P(M) = 0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}20 \neq 0{,}15 = P(Nb \cap M).$$

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos } Nb \textit{ y } M \textit{ no son independientes.}}$

****