PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2019

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorarán la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Puede utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizarán las que porten información

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de a el sistema $\left.\begin{array}{r}(a+2)x+(a-1)y-z=1\\ ax-y+z=-1\\ 11x+ay-z=a\end{array}\right\}$ es compatible.

b) Resolvedlo en el caso de $a=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 11 & a & -1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+2)-a^2+11(a-1)-11-a(a+2)+a(a-1)=$$

$$=a+2-a^2+11a-11-11-a^2-2a+a^2-a=$$

$$=-a^2+9a-20=0;\ \ a^2-9a+20=0;\ \ a=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2}\Rightarrow a_1=4, a_2=5.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a\neq 4 \\ a\neq 5\end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\text{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -1 \\ 11 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -24+16-33+11+24-48 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=5 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \\ 11 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 11 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -35+25-44+11+35-100 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \left.\begin{cases} m=4 \\ m=5 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Se resuelve para $a=0$; el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=1 \\ -y+z=-1 \\ 11x-z=0 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado; se resuelve por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{1+1}{-20}=\frac{2}{-20}=-\frac{1}{10}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{2+11-11}{-20}=\frac{2}{-20}=-\frac{1}{10}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{11+11}{-20}=\frac{22}{-20}=-\frac{11}{10}.$$

$$\underline{Solución: x=-\frac{1}{10},\ y=-\frac{1}{10},\ z=-\frac{11}{10}}.$$

****

2º) Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto $(1, 0)$. Determine los coeficientes $a, b\ y\ c$ para que tengan la misma recta tangente en este punto y calcularla.

Por pasar ambas funciones por $(1, 0)$ es:

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 0;\ \ a + b = -1.$ (1)

$g(1) = 0 \Rightarrow 1 - c \cdot 1^2 = 0;\ \ 1 - c = 0 \Rightarrow \underline{c = 1}.$ $g(x) = x - x^2.$

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b;\ \ g'(x) = 1 - 2x.$

Por tener la misma recta tangente el $(1, 0)$ es $f'(1) = g'(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 2a \cdot 1 + b = 2a + b + 4 \\ g'(1) = 1 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + b + 4 = -1. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a + b = -5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = 1 \\ 2a + b = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -4\ y\ b = 3}.$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$m = g'(1) = -1.$ El punto de tangencia es $(1, 0)$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Las recta tangente pedida es la siguiente:

$y - 0 = -1(x - 1) = -x + 1\ \Rightarrow\ \underline{t \equiv x + y - 1 = 0}.$

****

3º) Determine la posición relativa del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ y la recta de ecuación continua $r \equiv x-1=y-1=\frac{z-1}{-2}$. Calcule la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv x-1=y-1=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-1=y-1 \\ -2x+2=z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=3 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ 2x+z=3 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1+2-1=0 \Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3+2-3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$

Un punto de r es $P(1,1,1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,1,1)$.

La recta t, perpendicular a π que contiene al punto P es $t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección de la recta t con el plano π, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv x+y+z=1 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)=1;\;\; 3\lambda+3=1;$$

$$3\lambda=-2;\;\; \lambda=-\frac{2}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

La proyección pedida es la recta r' que contiene al punto Q y es paralela a r:

$$\underline{r' \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{3}+\lambda \\ y=\frac{1}{3}+\lambda \\ z=\frac{1}{3}-2\lambda \end{cases}}.$$

****

4º) Las alturas X de los estudiantes de 18 años del instituto de Palma se distribuyen según una distribución normal de media $\mu = 1{,}78\ m$ y desviación típica $\sigma = 0{,}65\ m$. Se pide:

a) Porcentaje de estudiantes de 18 años del instituto de Palma que miden más de 1,90 metros.

b) Cogemos una muestra de 100 estudiantes de 18 años del instituto de Palma y queremos seleccionar a los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que deben tener los estudiantes de 18 años del instituto de Palma para ser seleccionados?

----

a)

$Datos$: $\mu = 1{,}78;\ \ \rho = 0{,}65.$

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(1{,}78; 0{,}65).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1{,}78}{0{,}65}$.

$P = P(X > 1{,}90) = P\left(Z > \frac{1{,}90-1{,}78}{0{,}65}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}12}{0{,}65}\right) = P(Z > 0{,}18) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}18) = 1 - 0{,}5714 = 0{,}4286.$

$\underline{Miden\ más\ de\ 1{,}90\ m, aproximadamente, el\ 43\ \%\ de\ los\ estudiantes.}$

b)

$p(\overline{X} \geq x) = 0{,}3 \Rightarrow 1 - p(Z \leq x) = 0{,}3;\ \ p(Z \leq x) = 0{,}7.$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$, con el valor de 0,7 se obtiene, aproximadamente 0,525.

$\frac{X-1{,}9}{0{,}65} = 0{,}525;\ \ X - 1{,}9 = 0{,}525 \cdot 0{,}65 = 0{,}341;\ X = 1{,}9 + 0{,}341 = 2{,}24.$

(la solución no tiene mucho sentido, pero los datos son los que son).

$\underline{La\ altura\ mínima\ es\ de\ 2{,}24\ metros.}$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$ y los vectores $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$. Calcular x e y para que se verifique: $\vec{b}-A\cdot\vec{c}=A\cdot\vec{d}$.

$$\vec{b}-A\cdot\vec{c}=A\cdot\vec{d};\;\; \vec{b}=A\cdot\vec{d}+A\cdot\vec{c}=A\cdot\left(\vec{d}+\vec{c}\right)=A\left[\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6-y \\ -2+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x-xy+6y-y^2 \\ -2y+2y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$2y^2-2y=\frac{3}{2};\;\; 4y^2-4y-3=0;\;\; y=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2\cdot4}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}=\frac{4\pm8}{8}=\frac{1\pm2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}, y_2=\frac{3}{2}.$$

$$y_1=-\frac{1}{2}\Rightarrow 6x-x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=2;\;\; 6x+\frac{x}{2}-3-\frac{1}{4}=2;$$

$$24x+2x-12-1=8;\;\; 26x=21\Rightarrow x_1=\frac{21}{26}.$$

$$y_2=\frac{3}{2}\Rightarrow 6x-x\cdot\frac{3}{2}+6\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=2;\;\; 6x-\frac{3x}{2}+9-\frac{9}{4}=2;$$

$$24x-6x+36-9=8;\;\; 18x=-19\Rightarrow x_2=-\frac{19}{18}.$$

$$\underline{Soluciones: x_1=\frac{21}{26}, y_1=-\frac{1}{2}\;\; y\;\; x_2=-\frac{19}{18}, y_2=\frac{3}{2}.}$$

****

2º) Consideremos la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ y el eje de abscisas OX. Haga un esbozo de la región dada y calcule su área.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con el eje OX son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x^4 = 0;\ \ x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = -1 \to A(-1,0). \\ x_3 = 1 \to B(1,0) \end{cases}$$

Los máximos y mínimos son los siguientes:

$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 0;\ \ 2x(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

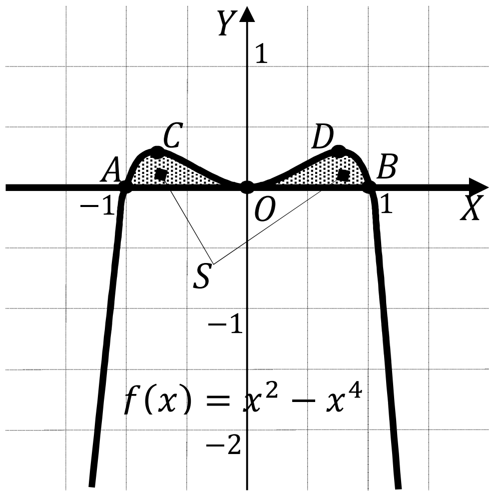
$$f''(x) = 2 - 12x^2.$$

$$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo: O(0,0).$$

$$f''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - 12 \cdot \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow Máximos\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ y\ para\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow Máximos: C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)\ y\ D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

La representación gráfica de la situación es la que indica la figura adjunta.



Para el cálculo del área se tiene en cuenta la simetría de la función.

$$S = 2 \cdot \int_0^1 (x^2 - x^4) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^5}{5}\right) - 0\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \frac{5-3}{15} = \frac{4}{15}.$$

$$\underline{S = \frac{4}{15}\ u^2 \cong 0{,}27\ u^2.}$$

****

3º) Consideremos la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 1$ y el plano $\pi \equiv x - y = 0$. Calcule el área del triángulo formado por el punto de corte entre la recta y el plano, el punto $A(1, -1, 1)$ de la recta y la proyección ortogonal del punto A sobre el plano.

La expresión de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-1}{-1}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

El punto P de intersección de la recta y el plano es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) = 0;\ \ 1 + 2\lambda + 1 - \lambda = 0;$$

$$2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 4 = -3 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-3, -3, 3).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

La recta s, perpendicular al plano π y que contiene al punto $A(1, -1, 1)$ es la siguiente: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto A', proyección ortogonal del punto A sobre el plano π el la intersección del plano con la recta s:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + \mu) - (-1 - \mu) = 0;\ \ 1 + \mu + 1 + \mu = 0;$$

$$2 + 2\mu = 0;\ \ 1 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 + 1 = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A'(0, 0, 1).$$

Los puntos $A(1, -1, 1), P(-3, -3, 3)$ y $A'(0, 0, 1)$ forman los vectores:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = [(1, -1, 1) - (-3, -3, 3)] = (4, 2, -2).$$

$$\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OP} = [(0, 0, 1) - (-3, -3, 3)] = (3, 3, -2).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{APA'} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PA'}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= |-2i - 3j + 6k - 3k + 3i + 4j| = |i + j + 3k| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}.$$

$$\underline{S = \sqrt{11}\, u^2}.$$

****

4º) En una comunidad de 500 estudiantes de 2º de bachillerato, 200 estudian la opción científico-tecnológica. Hay 150 que practican fútbol y 100 que practican baloncesto (entendemos que no hay ninguno que practique fútbol y baloncesto a la vez). De los que practican baloncesto, 70 estudian la opción científico-tecnológica, y hay 150 estudiantes que no practican deporte, ni hacen la opción científico-tecnológica. Se pide:

a) Probabilidad que un estudiante estudie la opción científico-tecnológica y no practique deporte.

b) Sabiendo que un estudiante practica fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científico-tecnológica?

c) ¿Son independientes los eventos "practicar fútbol" y "estudiar la opción científico-tecnológica". Razonar la respuesta.

La tabla de contingencia que se deduce del enunciado es la siguiente:

	Científico-Técnico	No científico-Técnico	Total
Fútbol			150
Baloncesto	70		100
No deporte		150	
Total	200		500

Completando la tabla de contingencia:

	Científico-Técnico	No científico-Técnico	Total
Fútbol	**30**	**120**	150
Baloncesto	70	**30**	100
No deporte	**100**	150	**250**
Total	200	**300**	500

Ahora se contestan las preguntas:

a)

$$P = P\left(CT \cap \overline{D}\right) = \frac{100}{500} = \underline{0,2}.$$

b)

$$P = P(CT/F) = \frac{P(CT \cap F)}{P(F)} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = \underline{0,2}.$$

c)

Dos sucesos F y CT son independientes cuando $P(F \cap CT) = P(F) \cdot P(CT)$:

$$P(F) \cdot P(CT) = \frac{150}{500} \cdot \frac{200}{500} = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \neq \frac{30}{500} = 0,06 = P(F \cap CT).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ F\ y\ CT\ no\ son\ independientes.}$

****