Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS] Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.
2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.
3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
4) [1 PUNTO] Calcula X.

Solución

(1)

Despeja la matriz X en la igualdad dada.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0$, existen las matrices inversas A^{-1} y $(A^t)^{-1}$.

Multiplicando la expresión $AXA^t = B$ por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por $(A^t)^{-1}$. Tenemos:
$A^{-1}\cdot AXA^t\cdot(A^t)^{-1} = A^{-1}\cdot B\cdot(A^t)^{-1} \rightarrow I\cdot X\cdot I = A^{-1}\cdot B\cdot(A^t)^{-1}$, **luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot B\cdot (A^t)^{-1}}$.**

(2)

Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

Como $\det(A) = |A| = -2 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3)

Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

De la definición de inversa $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$. Tomando traspuestas tenemos:
$(A\cdot A^{-1})^t = (A^{-1}\cdot A)^t = I^t = I$, aplicando las propiedades de las traspuestas tenemos $(A^{-1})^t.A^t = A^t.(A^{-1})^t = I$, luego por definición de matriz inversa $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

Por tanto $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4)

Calcula X.

$$\mathbf{X = A^{-1}\cdot B\cdot (A^t)^{-1}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa $x = \pi$.
3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.
4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solución

(1)

Calcula la derivada primera.

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x};\quad f'(x) = \frac{x\cdot\cos(x) - 1\cdot sen(x)}{x^2}$$

(2)

Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa $x = \pi$.

La pendiente de la recta tangente en $x = \pi$ es $f'(\pi) = \frac{\pi\cdot\cos(\pi) - 1\cdot sen(\pi)}{\pi^2} = \frac{\pi\cdot(-1) - 0}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi}$.

(3)

Calcula las asíntotas.

El dominio de f(x) es R – {0}.

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

Sabemos que la recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de la función f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Como $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \left\{\frac{0}{0}, L'H\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{1} = \frac{cos(0)}{1} = 1$, **la recta x = 0 no es una asíntota vertical de f(x).**

Sabemos que la recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de la función f(x) si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Como $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{sen(x)}{x} = \frac{sen(\pm\infty)}{\pm\infty} = \frac{\text{Función acotada}}{\pm\infty} = 0$, **la recta y = 0 no es una asíntota horizontal de f(x) en ±∞, por tanto no tiene asíntotas oblicuas en ±∞.**

(4)

Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ya lo hemos calculado al ver las asíntotas y valía 1.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto P = (1, 2, 8) en la dirección del vector **v** = (1, 2, -3). El plano -x - y - 3z = -8 determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.

3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución

(1)

Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

Para una recta necesitamos un punto, el P = (1, 2, 8), y un vector director, el **v** = (1, 2, -3), las ecuaciones paramétricas de la recta son $r \equiv \begin{cases} x = 1 + m \\ y = 2 + 2m \\ z = 8 - 3m \end{cases}$ con $m \in R$.

(2)

Determina la posición relativa de rayo y lámina.

Un vector director de la recta es **v** = (1, 2, -3) y un vector normal del plano π es **n** = (-1, -1, -3).

Si el producto escalar (•) de estos vectores es cero, la recta y el plano son paralelos, en caso contrario se cortan en un punto.

Como **v•n** = (1, 2, -3)• (-1, -1, -3) = -1 – 2 + 9 = 6 ≠ 0, **la recta y el plano se cortan en un punto.**

3)

Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Si el nievo plano π_1 es perpendicular a la recta "r" el vector normal del plano π_1 coincide con el director de la recta r es decir, **n = v** = (1, 2, -3). Como pasa por el origen O = (0, 0, 0), **la ecuación del plano pedido es π_1 ≡ OX•n =** (x, y, z)• (1, 2, -3) **= x + 2y - 3z = 0.**

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.
2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Solución

(1)

Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

Se trata de una distribución normal N(20, 5). Calculemos las probabilidades pedidas:

Me dicen que dar negativo es para concentraciones inferiores a 10 U.

Me piden **$p(X \leq 10)$ =** $p\left(Z \leq \dfrac{10 - 20}{5}\right)$ = p(Z ≤ -2) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ 2) =

= 1 – 0'9772 **= 0'0228.**

(2)

Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Nos dicen que 1% = 0'01 = p(Z < k), siendo k el valor de la normal para que la probabilidad sea 0'01.

De p(Z < k) = 0'01, tenemos p(Z < - k) = 0'99, mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'99 no viene, las más próximas son 0.9898 y 0.9901, y corresponden a los valores de "k" 2'32 y 233 luego k = (2'32 + 2'33)/2 = 2'325, por tanto *– k = - 2'325*.

Tipificando tenemos $-2'325 = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 20}{5}$, de donde **X =** -5·2'325 + 20 **= 8'375, es decir las concentraciones tienen que ser de 8'375 U.**

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.
1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.
2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.
3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Solución

(1)

Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

x = Número de tanques.
y = Número de submarinos.
z = Número de aviones.

De "El rival ha gastado 41 diamantes, y se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes " → x + 3y + 5z = 41.

De "tiene el doble de submarinos que de tanques" → y = 2x.

De "el número de submarinos más el de aviones es 10" → y + z = 10.

Nuestro sistema es: $\begin{cases} x + 3y + 5z = 41 \\ -2x + y = 0 \\ \quad y + z = 10 \end{cases}$

(2) y (3).

Clasifica el sistema y resuelve el sistema.

Resolvemos el sistema por con las transformaciones elementales. Si aplicando las transformaciones elementales de Gauss obtennos un sistema escalonado con tres ecuaciones y tres incógnitas, tenemos un sistema compatible y determinado y tiene solución única.

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 41 \\ -2x + y = 0 \\ y + z = 10 \end{cases} (E_2+2E_1) \approx \begin{cases} x + 3y + 5z = 41 \\ 7y + 10z = 82 \\ y + z = 10 \end{cases} (E_2-7E_3) \approx \begin{cases} x + 3y + 5z = 41 \\ 3z = 12 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

, por tanto es un sistema compatible y determinado y tiene solución única.

De la segunda ecuación $z = 4$, de la tercera $y = 6$ y de la primera $x + 18 + 20 = 41$, de donde $x = 3$, es **decir la solución de nuestro sistema es (x, y, z) = (3, 4, 6), por tanto tiene 3 tanques, 6 submarinos y 4 aviones.**

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$.
3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$ y $x = 2$, y el eje *OX* de abscisas OX.

Solución

(1)

Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

El dominio de f(x) es R – {0}.

Sabemos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de la función $f(x)$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Como $\lim_{x\to 0+} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$, **la recta x = 0 es una asíntota vertical de f(x).**

Posición relativa, $\lim_{x\to 0-} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Como $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$., **la recta y = 0 no es una asíntota horizontal de f(x) en ±∞, por tanto no tiene asíntotas oblicuas en ±∞y la gráfica de la función siempre está por encima de OX (recta y = 0).**

(2)

Halla una primitiva de $f(x)$.

Una primitiva de f(x) es: $I = \int \frac{2}{x^2}dx = 2\cdot\int x^{-2}dx = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + K = \frac{-2}{x} + K.$

(3)

Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$ y $x = 2$, y el eje *OX* de abscisas OX.

Hemos visto antes que $f(x) > 0$ en su dominio, **luego el área pedida es** $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2dx}{x^2} = \left[\frac{-2}{x}\right]_1^2 =$

$= (-2/2 - (-2/1))\ u^2$ **= 1 u^2.**

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos A = (1, 2, 1), B = (2, 3, -4), C = (4, 3, 2).

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.
2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.
3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución

(1)

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

Para una recta necesitamos un punto, el A = (1, 2, 1), y un vector director, el **AB** = (1, 1, -5), **la ecuación vectorial de la recta es: r ≡ (x, y, z) = (1, 2, 1) + m·(1, 1, -5) con m ∈ R.**

(2)

Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

Para un plano necesitamos un punto, el A = (1, 2, 1), y dos vectores independientes, el **AB** = (1, 1, -5) y el **AC** = (3, 1, 1).

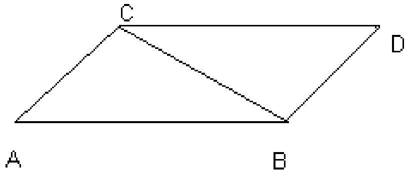
El plano pedido es $\pi \equiv$ **det(AX, AB, AC) = 0 =** $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= (x-1)(1+5) - (y-2)(1+15) + (z-1)(1-3) = (x-1)(6) - (y-2)(16) + (z-1)(-2) **= 6x - 16y - 2z + (-6+32+2) = 0 =**
= 6x - 16y - 2z + 28 = 0 = 3x - 8y - z + 14 = 0

(3)

Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Sabemos que el área del triángulo ABC, es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados AB y AC, es decir el determinado por los vectores **AB** y **AC**, luego: Área = (1/2)·**||AB**x**AC||**



AB = (1, 1, -5); **AC** = (3, 1, 1); **AB**x**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(1+5) - **j**(1+15) + **k**(1-3) = (6, -16, -2)

||ABx**AC||** = $\sqrt{(6)^2+(16)^2+(2)^2}$ = $\sqrt{296}$. **Área del triángulo es = (1/2)·||ABxAC|| = (1/2)·$\sqrt{296}$ $u^2 \cong$ 8'6 u^2**

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.
3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €

Solución

(1)

Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

Llamemos G, 1, 4 y C, a los sucesos siguientes, "ganar 400 €", "salir 1", "salir 4" y "salir cara", respectivamente. (Recordamos que lanzar dado y lanzar moneda son sucesos independientes, por tanto la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades)

Tenemos p(1) = p(4) = 1/6, p(C) = p(Cruz) = 1/2.

Piden **p(ganar 400 €) = p(G) =** p(1 y cara) + p(salir4 y cruz) = p(1$\cap$cara) + p(4$\cap$cruz) =
= (1/6)(1/2) + (1/6)(1/2) **= (1/6)** $\cong$ **0'166667.**

(2)

Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

Piden **p(ganar sabiendo que ha salido cara) = p(G/C) =**{son sucesos independientes} **= p(G) = (1/6)** $\cong$
$\cong$ **0'166667.**

(3)

Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €

Me piden **p(salir cara sabiendo ha ganado 400 €) = p(C/G) =** $\dfrac{p(C\cap G)}{p(D)} = \dfrac{p(C).p(G/C)}{p(G)}$ **=**

=[(1/2)·(1/6)] / (1/6) = 1/2 = 0'5.