Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS] Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + (1 - t)y = t \\ (1 + t)x - 3y = -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.
2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.
3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución

(1)

Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & t \\ 1+t & -3 & -t \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix} = -3 - (1 - t^2) = t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2)$. De $|A| = 0$ tenemos $(t - 2)(t + 2) = 0$, por tanto $t = -2$ y $t = 2$.

Si $t \neq -2$ y $t \neq 2$, $|A| \neq 0$, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2** = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si t = -2, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, rango(A) = 1. En A* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, rango(A*) = 1

Si t = -2, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 1** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (más de una).

Si t = 2, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$, rango(A) = 1. En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8 \neq 0$, rango(A*) = 2.

Si t = -2, tenemos **rango(A) = 1 ≠ rango(A*) = 2**, por el Teorema de Rouchè, el **sistema es incompatible y no tiene solución**.

Si $t \neq -2$ y $t \neq 2$, $|A| \neq 0$, el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única, vamos a resolverlo por Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 1-t \\ -t & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}} = \frac{t\cdot(-3+1-t)}{(t-2)(t+2)} = \frac{t\cdot(-t-2)}{(t-2)(t+2)} = \frac{-t}{(t-2)} \ , \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1+t & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}} = \frac{t\cdot(-1-1-t)}{(t-2)(t+2)} = \frac{t\cdot(-t-2)}{(t-2)(t+2)} = \frac{-t}{(t-2)} .$$

LA solución del sistema con $t \neq -2$ y $t \neq 2$ es (x, y) = (-t/(t - 2), -t/(t - 2))

(2)

Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

Hemos visto en el apartado (1) que para t = -2 tiene más de una solución y como el rango es 1, sólo necesitamos una ecuación, la 1ª.

De $x + 3y = -2$, tomando $y = \lambda \in R$, $x = -2 - 3\lambda$, **y la solución del sistema para t = -2 es:**
$(x, y) = (-2 - 3\lambda, \lambda)$ con $\lambda \in R$.

(3)

Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Hemos visto en el apartado (1) que para t = 2 el sistema no tenía solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera
2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = π.
3) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.
4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Solución

(1)

Calcula la derivada primera

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}\ ;\ f'(x) = \frac{x\cdot \text{sen}(x) - 1\cdot(1 - \cos(x))}{x^2} = \frac{x\cdot \text{sen}(x) + \cos(x) - 1}{x^2}$$

(2)

Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = π.

La pendiente de la recta tangente en $x = \pi$ es $f'(\pi) = \frac{\pi\cdot \text{sen}(\pi) + \cos(\pi) - 1}{\pi^2} = \frac{0 - 1 - 1}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}$.

(3)

Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Recordamos la regla de L'Hôpital (L'H), que nos dice que si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞)

Como $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \left\{\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}, \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{1} = \frac{\text{sen}(0)}{1} = 0$.

(4)

Calcula las asíntotas.

Sabemos que la recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de la función f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Como $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \left\{\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}, \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{1} = \frac{\text{sen}(0)}{1} = 0$, **la recta x = 0 <u>no es una asíntota vertical</u> de f(x).**

Sabemos que la recta y = b es una asíntota horizontal (A.H.) de la función f(x) si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1 - \cos(\pm\infty)}{\pm\infty} = \frac{\text{Función acotada}}{\pm\infty} = 0$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f(x) en ±∞, por tanto no tiene asíntotas oblicuas en ±∞.**

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS] Considera los puntos A = (2, 1, 5), B = (3, 4, 1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$.

1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.
2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.
3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Solución

(1)

Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

La recta s pedida tiene como punto el A = (2, 1, 5) y como vector el **AB** = (1, 3, -4), **es** $s: \begin{cases} x = 2 + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 5 - 4m \end{cases}$ **con m ∈ R.**

(2)
Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

Como la recta t pedida es perpendicular a la recta r y s su vector director **w** será el producto vectorial (x) del vector director **u** = (-1,-3,-4) y el vector **AB** = (1,3,-4) de la recta s, es decir **w**=**u**x**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(12+12) - **j**(4+4) + **k**(-3+3) = (24, -8, 0), otro proporcional es $\mathbf{w_1}$ = (3, -1, 0) **luego la recta pedida es**

$$t: \begin{cases} x = 3 + 3n \\ y = 4 - n \\ z = 1 \end{cases} \quad \textbf{con } \mathbf{n \in R}$$

(3)
Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Me piden el plano π que contiene a las rectas $s: \begin{cases} x = 2 + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 5 - 4m \end{cases}$ y $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$, que vemos no son paralelas, porque sus vectores no son proporcionales.

El plano pedido π tiene por punto el de r, M(3, 4, 1), y como vectores independientes $\mathbf{w_1}$ = (0, 1, 0) y **u** = (-1,-3,-4).

El plano pedido es π: $\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = (x-3)(-12-12) – (y-4)(-4-4) + (z-1)(-3+3) **= 0 =**

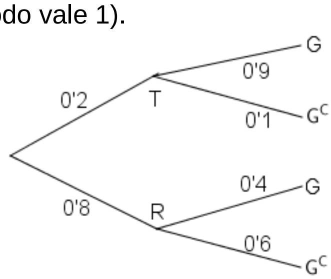
= -24x + 8y + 40 = 0 = 3x - y - 5 = 0.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.
1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.
2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.
Solución
(1)
Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

Llamemos T, R, G, y G^C, a los sucesos siguientes, “jugar en tierra batida", “jugar en el resto de superficies", "ganar partido" y "no ganar partido ", respectivamente.

Datos del problema: p(T) = 20% = 0’2; p(G/T) = 90% = 0’9; p(G/R) = 40% = 0’4, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(ganar un partido) = p(G)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:
Tenemos: **p(G) =** p(T).p(G/T) + p(R).p(G/R) = (0’2)·(0’9) + (0’8)·(0’4) **= 1/2 = 0’5**.
(2)
Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado

dicho partido.

Me piden **p(jugar en tierra batida si ha ganado) = p(T/G)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(T/G) =} \frac{p(T\cap G)}{p(G)} = \frac{p(T)\cdot p(G/T)}{p(G)} = \frac{(0'2)\cdot(0'9)}{0'5} \mathbf{= 9/25 = 0'36}.$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS] Considera la ecuación matricial AX - X = B, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.
2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.
3) [1 PUNTO] Calcula X para a = 1.

Solución

(1)
Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

De AX - X = B $\rightarrow$ (A – I)·X = B. Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz A – I = C, suponiendo que exista, $\rightarrow C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X = C^{-1}\cdot B \rightarrow$ $\mathbf{X = C^{-1}\cdot B = (A - I)^{-1}\cdot B.}$

(2)
Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

Existe la matriz inversa de C = A - I si det(C) = |C| $\neq$ 0, luego para los valores de a que verifiquen det(C) = 0 no es posible calcular la matriz X.

Como $|C| = |A - I| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 + 1 = a$, **luego si a = 0 no existe $\mathbf{C^{-1} = (A-I)^{-1}}$ y no es posible calcular la matriz X.**

(3)
Calcula X para a = 1.

Para a = 1, $C = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sabemos que $C^{-1} = \frac{1}{|C|}Adj(C^t)$; $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1 = 1$; $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $\mathbf{X = C^{-1}\cdot B = (A - I)^{-1}\cdot B =} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \begin{cases} sen(x) & si \quad x \leq \pi/2 \\ \frac{2}{x} + a & si \quad x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

1) [0.5 PUNTOS] Halla a para que f(x) sea continua.
2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de f(x) para x ≤ π/2.
4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función y = f(x), las rectas x = 0, x = π/2, y el eje OX de abscisas.

Solución

(1)
Halla a para que f(x) sea continua.

Solo falta estudiar la continuidad de f(x) en x = π/2.

Sabemos que f es continua en x = π/2 si $f(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2+} f(x)$

$f(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} sen(\pi/2) = 1$. $\lim_{x\to\pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^+}\left(\frac{2}{x} + a\right) = \frac{2}{\pi/2} + a = \frac{4}{\pi} + a$.

Igualando tenemos 1 = 4/π + a, **de donde a = 1 – 4/π para que f(x) sea continua**.

(2)

Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Tenemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} sen(x) = sen(-\infty)$, **función acotada entre -1 y 1, luego no existe** $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Tenemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} + a\right) = \frac{2}{+\infty} + a = 0 + a$ **= a.**

(3)

Halla una primitiva de f(x) para x ≤ π/2.

Una primitiva de f(x) es: $F(x) = \int sen(x)dx = -cos(x) + K$.

(4)

Calcula el área de la región limitada por la función y = f(x), las rectas x = 0, x = π/2, y el eje OX de abscisas.

Área = , **luego el área pedida es** $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} sen(x)dx = \left[-cos(x)\right]_0^{\pi/2}$ = (-cos(π/2)) – (-cos(0)) u^2 =

= (0 - (-1)) u^2 **= 1 u^2.**

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS] Considera los puntos A = (1, 3, 1), B = (4, 1, -2), C = (3, 5, 2), D = (1, 1, 3).

1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano, π, que contiene los puntos A, B, C.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores **AB** y **AC**.

Solución

(1)

Halla la ecuación del plano, π, que contiene los puntos A, B, C.

Para un plano necesitamos un punto, el A = (1, 3, 1), y dos vectores independientes, el **AB** = (3, -2, -3) y el **AC** = (2, 2, 1).

El plano pedido es π ≡ det(AX, AB, AC) = 0 = $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= (x-1)(-2+6) - (y-3)(3+6) + (z-1)(6+4) = (x-1)(6) - (y-2)(16) + (z-1)(-2) **= 4x - 9y + 10z + 13 = 0.**

(2)

Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

D ∈ π si verifica su ecuación. **Como 4(1) – 9(1) + 10(3) + 13 = 38 ≠ 0, D ∉ π.**

(3)

Calcula el ángulo que forman los vectores **AB** y **AC**.

Sabemos que de cos(<**AB, C**>) = (**AB•AC**) / (||**AB**||·||**AC**||) se obtiene el ángulo que forman **AB** y **AC**.

Tenemos: **AB•AC** = (3, -2, -3)•(2, 2, 1) = 6 - 4 – 3 = -1.

||**AB**|| = √($(3)^2+(2)^2+(3)^2$) = √(22); ||**AC**|| = √($(2)^2+(2)^2+(1)^2$) = √(9).

Luego el ánulo es: α = (<**AB, AC**>) = arcos[(**AB•AC**)/(||**AB**||·||**AC**||)] = arcos(-1/√(22·9)) ≅ **94’075269º.**

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS] En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm.

Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

2) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

4) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Solución

(1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

P(mida más de 190) = nº favorables/nº posibles **= 12/250 = 0’048.**
(2)
Calcula la probabilidad de que sea holandés.

P(ser holandés) = nº favorables/nº posibles **= 7/250 = 0’028.**
(3)
Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

Si es holandés la variable X, estatura, sigue una distribución normal N(μ,σ) = N(184, 7).

Me piden **p(X ≥ 190) =** {tipificamos} $= p\left(Z \geq \frac{190 - 184}{7} \right)$ = p(Z ≥ 0’86) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ 0’86)

= 1 – 0’8051 **= 0’1949.**
(4)
Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Piden **p(ser holandés si mide más de 190 cm) =** $\frac{\text{p(holandes y más de 190 cm)}}{\text{p(más de 190 cm)}}$ =

$= \frac{\text{p(holandes)}\cdot\text{p(más de 190 cm si es holandes y)}}{\text{p(más de 190 cm)}}$ = **(0’028·0’1949)/0’048** ≅ **0’11369.**