EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
LOMCE - JUNIO 2021.   MATEMATICAS II.

INDICACIONES AL ALUMNO

Ejercicio 1 [2'5 PUNTOS]

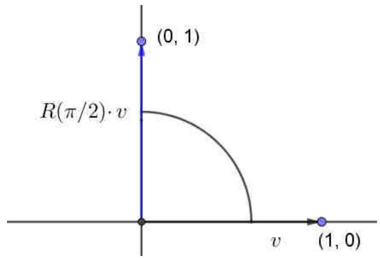
Considera el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, **v** $\in$ R^2, y la matriz de rotación $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) [0'5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \pi/2$ que $R(\theta)\cdot$**v** rota el vector **v** un ángulo θ en sentido antihorario.
2) [0'5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \pi/2$ que $R^2(\theta)\cdot$**v** rota el vector **v** un ángulo 2θ en sentido antihorario.
3) [0'5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.
4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

a)

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{matriz de rotación.}$$

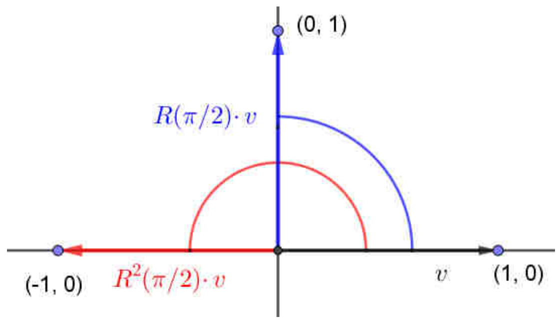
$R\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot v=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pasamos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



b)

$R^2(\pi/2)=\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matriz de rotación.

$R^2(\pi/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pasamos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ al vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



c)

$$|R(\theta)|=\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}=\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)=1\neq 0\ .\forall\theta\in\mathbb{R}\Rightarrow \text{Existe } R^{-1}(\theta)$$

d)

$$R^{-1}(\theta)=\frac{1}{|R(\theta)|}\cdot \text{adj } R^t(\theta)\Rightarrow R^t(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\Rightarrow \text{adj } R^t(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\Rightarrow R^{-1}(\theta)=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$R^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Vemos que $R(-\theta)=\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}=R^{-1}(\theta)$.

Ejercicio 2 [2’5 PUNTOS]
Considera la función f(x) = x^2.
1) [0’5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 1. Llamaremos a dicha recta g(x).
2) [0’5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas g(x), x = 1/2, x = 1, y el eje OX de abscisas.
3) [0’5 PUNTOS] Halla una primitiva F(x) de la función f(x).
4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f(x), y las rectas g(x), x = 1/2.
1)

$$y' = 2x \Rightarrow \begin{cases} y(1) = 1^2 = 1 \\ y'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow y - 1 = 2 \cdot (x-1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow g(x) = y = 2x - 1$$

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

2)

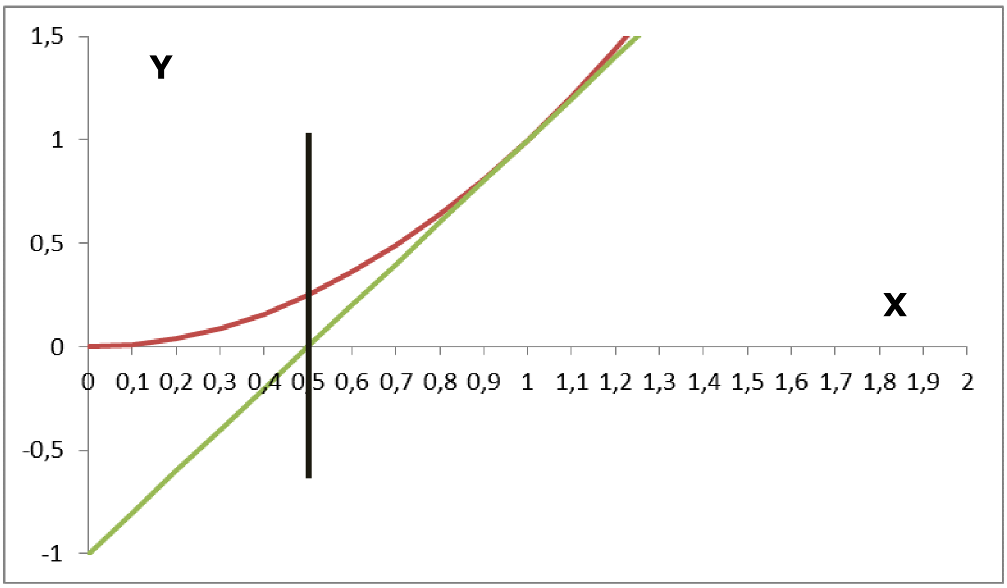
$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{4} u^2$$

3)

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + K$$

4)



$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left[1^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] - \left[1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{7}{24} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7 - 18 + 12}{24} = \frac{1}{24} u^2$$

Ejercicio 3 [2’5 PUNTOS]
Se dispara un misil en línea recta desde el punto A = (1, 2, 8) hacia la posición de la base enemiga B = (3, 4, 0).
1) [0’5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.
2) [0’5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano z = 4.
3) [0’5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.
4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores **OB** y **AB.**

1) El vector de la recta r es el AB y con uno de los puntos (tomamos el A) queda determinada la recta

$$\overrightarrow{AB}=(3,4,0)-(1,2,8)=(2,2,-8)\equiv(1,1,-4)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=8-4\lambda\end{cases}$$

2) Hallaremos la intersección P de la recta con el plano

$$8-4\lambda=4\Rightarrow 4\lambda=4\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow P\begin{cases}x=1+1\\ y=2+1\\ z=8-4\cdot 1\end{cases}\Rightarrow P(2\ ,3\ ,4)$$

3) Es el módulo del vector AB. Hay que tomar los valores sin simplificar

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,-8)\Rightarrow d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\ u$$

4) Suponiendo que el punto O es el centro de coordenadas, el vector perpendicular será el producto vectorial de OB y AB. En este caso, al no haber medidas, se puede utilizar el vector simplificado

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1,1,-4)\\ \overrightarrow{OB}=(3,4,0)-(0,0,0)=(3,4,0)\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&1&-4\\ 3&4&0\end{vmatrix}=-12\vec{j}+4\vec{k}-3\vec{k}+16\vec{i}=16\vec{i}-12\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow$$

$$\vec{v}=(16,-12,1)$$

Ejercicio 4 [2’5 PUNTOS]
La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.
1) [1’25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.
2) [1’25 PUNTOS] ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

1)
Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

La testosterona en hombres (X) sigue una distribución normal N(600, 200).

Me dicen **p(tener una concentración de más de 1000 ng/dl) = p(X ≥ 1000)** = {tipificamos} =
= $p\left(Z\geq\frac{1000-600}{200}\right)$ = p(Z ≥ 2) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ 2) **= 1 - 0’9772 = 0’0228.**

2)
¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1000?

Nos dicen que p(X ≥ k) = 0’001 (1 entre 1000) = {tipificamos} = $p\left(Z\geq\frac{k-600}{200}\right)$ = 1 - $p\left(Z\leq\frac{k-600}{200}\right)$, de donde tenemos que $p\left(Z\leq\frac{k-600}{200}\right)$ = 1 - 0’001 = 0’999. Mirando en la tabla de la normal vemos que la probabilidad 0’999 viene y que corresponden al punto crítico 3’08, por tanto $\frac{k - 600}{200} = 3'08$, de donde tenemos que **k = 600 + 200·3’08 = 1216, luego elegiríamos 1216 como límite de control antidopaje.**

Ejercicio 5 [2’5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0’5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $\lambda = -2$

$$A/B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 1 \neq \text{rang}(A/B) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $\lambda = 2$

$$A/B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 1 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda - 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 4} = \frac{-\lambda + 2\lambda - 2}{(\lambda + 2)(\lambda - 2)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda - 2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - 4} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda - 4}{(\lambda + 2)(\lambda - 2)} = \frac{2(\lambda^2 - \lambda - 2)}{(\lambda + 2)(\lambda - 2)}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{-\lambda + 2\lambda - 2}{\lambda^2 - 4}, \frac{2(\lambda^2 - \lambda - 2)}{\lambda^2 - 4} \right)$$

Si $\lambda = -2$

$$A/B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

Si $\lambda = 2$

$$A/B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y) = (\mu, 2\mu - 1), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 6 [2'5 PUNTOS]

En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, I(t), viene dada por la función $\begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{t^2}{3t^2+1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y t = 1 el inicio de la vacunación.

1) [0'75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que I(t) sea continua.
2) [0'75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.
3) [0'5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de I(t) para el instante t = 1/2.
4) [0'5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de I(t) para el instante t = 2.

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} I(t) = ke^{2\cdot 1} = ke^2 \\ I(t) = \lim\limits_{x\to 1^+} I(t) = \dfrac{1^2}{3\cdot 1^2+1} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow I(t) = \lim_{x\to 1^+} I(t) = \lim_{x\to 1^-} f(t) \Rightarrow ke^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4e^2}$$

b)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{3t^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2}}{3\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3+0} = \frac{1}{3} \Rightarrow 33'33\,\%$$

c)

$$velocidad(t) = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{4e^2}\cdot e^{2t}\cdot 2 = \frac{1}{2e^2}\cdot e^{2t} \Rightarrow velocidad\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e^2}\cdot e^{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{e}{2e^2} = \frac{1}{2e}$$

d)

$$velocidad(t) = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{2t\left(3t^2+1\right)-6t\cdot t^2}{\left(3t^2+1\right)^2} = \frac{6t^3+2t-6t^3}{\left(3t^2+1\right)^2} = \frac{2t}{\left(3t^2+1\right)^2} \Rightarrow v(2) = \frac{2\cdot 2}{\left(3\,2^2+1\right)^2} = \frac{4}{(12+1)^2} = \frac{4}{169}$$

Ejercicio 7 [2'5 PUNTOS]

Considera el plano $\pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos A = (1, 2, 1), B = (2, 3, 3).

1) [0'5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.
2) [0'25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano π.
3) [0'75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano π, y la recta que pasa por los puntos A y B.
4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

1) El vector de la recta r es el AB y con uno de los puntos (tomamos el A) queda determinada la recta

$$\overrightarrow{AB} = (2,3,3)-(1,2,1) = (1,1,2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$

2)

$$\overrightarrow{v_\pi} = (2,3,-4) \Rightarrow \textit{Es el vector director}$$

3) La recta y el plano o se cortan o son paralelos o la recta esta contenida en el plano. En los dos últimos casos el vector director de la recta y el del plano son perpendiculares y su producto escalar es nulo; si además tienen un punto común la recta esta contenida en el plano, si no es así son paralelos.
Si el producto escalar no es nulo la recta corta al plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2, 3, -4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (1, 1, 2) \cdot (2, 3, -4) = 2 + 3 - 8 = -5 \neq 0 \Rightarrow \textit{La recta r es secante alplano}$$

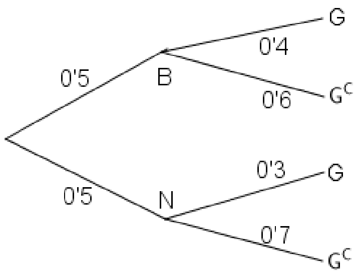
Ejercicio 8 [2'5 PUNTOS]
En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40% de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30% jugando con negras.
1) [1'25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.
2) [1'25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

1)
Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

Llamemos B, N, G, y G^C, a los sucesos siguientes, "jugar con piezas blancas", "jugar con piezas negras", "ganar la partida" y "no ganar la partida", respectivamente.

Datos del problema: p(B) = p(N) = 1/2 = 0'5; p(G/B) = 40% = 0'4; p(G/N) = 30% = 0'3, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(ganar la partida) = p(G)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos **p(G) =** p(B)·p(G/B) + p(N)·p(G/N) = (0'5)·(0'4) + (0'5)·(03) **= 7/20 = 0'35**.
2)
Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Me piden **p(jugar con blancas sabiendo que ha ganado) = p(B/G)**.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/G) =} \frac{p(B \cap G)}{p(G)} = \frac{p(B)\cdot p(G/B)}{0'35} = \frac{(0'5)\cdot(0'4)}{0'35} \mathbf{= 4/7 \cong 0'571428}.$$