PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2010 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

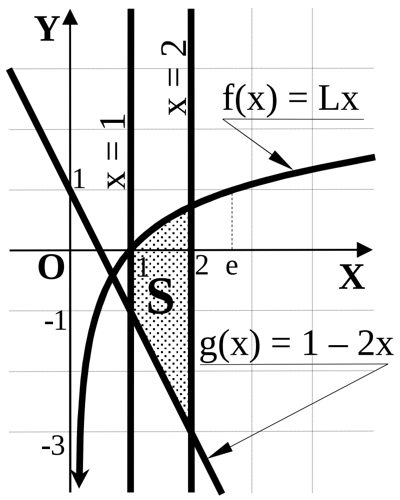
Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Dadas las funciones $f(x)=Lx$ y $g(x)=1-2x$, hallar el área del recinto plano limitado por las rectas x = 1, x = 2 y las gráficas de f(x) y g(x).

b) Dar un ejemplo de función continua en un punto y que no sea derivable en él.



a)

La representación gráfica de la situación se expresa, aproximadamente, en el dibujo adjunto.

Por ser las ordenadas de f(x) iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de g(x) en el intervalo de la superficie a calcular, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_1^2 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_1^2 [Lx-(1-2x)]\cdot dx=\int_1^2 (Lx-1+2x)\cdot dx \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que la integral indefinida de Lx es:

$$I=\int Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\right\}\Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=Lx\rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow I=Lx\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=Lx\cdot x-\int dx=Lx\cdot x-x=\underline{x(Lx-1)=I}$$

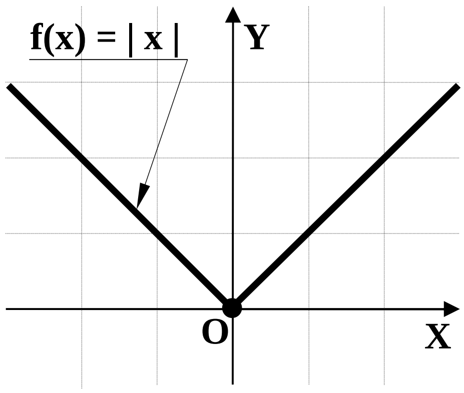
Teniendo en cuenta lo anterior y sustituyendo su valor en (*) resulta:

$$S=\left[x(Lx-1)-x+\frac{2x^2}{2}\right]_1^2=\left[xLx-x-x+x^2\right]_1^2=\left[xLx-2x+x^2\right]_1^2=\left[x(Lx-2+x)\right]_1^2=$$

$$=\left[2\cdot(L2-2+2)\right]-\left[1\cdot(L1-2+1)\right]=2L2+1=\underline{\underline{(L4+1)\,u^2\cong 2'39\,u^2=S}}$$

b)

Un ejemplo de función continua en un punto y que no sea derivable en ese punto es $f(x)=|x|$ en el punto de abscisa x = 0.



Como puede apreciarse, las derivadas por la izquierda y por la derecha para x = 0 son -1 y 1, respectivamente.

****

2º) a) Si el término independiente de un polinomio P(x) es -5 y el valor que toma P(x) para x = 3 es 7, ¿se puede asegurar que P(x) toma el valor 2 en algún punto del intervalo $[0,\ 3]$? Razonar la respuesta y enunciar los resultados teóricos que se utilicen.

b) Calcular $\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x} \cdot dx$.

----

a)

Teniendo en cuenta que una función polinómica es continua en su dominio, que es R, la representación gráfica de P(x) cumple las condiciones anteriores.

Siendo P(0) = -5 y P(3) = 7, implica necesariamente, que en el intervalo $[0,\ 3]$ la representación gráfica de P(x) toma todos los valores reales comprendidos entre -5 y 7, según el teorema del valor intermedio (que es una generalización del teorema de Bolzano), que dice:

"Si una función es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y siendo f(a) < f(b), entonces para cada u tal que f(a) < u < f(b), existe un valor c dentro de (a, b) tal que $f(c)=u$". La misma conclusión para el caso de ser f(a) > f(b).

b)

$$I=\int \frac{\cos x}{1+sen^2 x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} sen\ x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow I=\int \frac{dt}{1+t^2} = arc\ tag\ t + C = \underline{\underline{arc\ tag\ (sen\ x)+C}}$$

****

3º) a) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3 que verifica que $B^2 = 16\ I$, siendo I la matriz unidad. Calcular el determinante de B.

b) Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

----

a)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes:

$$|B^2| = |B \cdot B| = |B| \cdot |B| = (|B|)^2 = |16 \cdot I| = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} \Rightarrow |B| = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$$

$$\underline{\underline{|B| = 64}}$$

b)

Sabiendo que el producto de matrices es posible si tiene las dimensiones que se indican: $A_{(m\ x\ n)} \cdot B_{(n\ x\ z)} = C_{(m\ x\ z)}$, la matriz X tiene dimensión 2 x 3. Por otra parte la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es inversible por ser nulo su determinante; es por ello que solucionamos el ejercicio de la forma siguiente:

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} d & e & f \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{d = e = 0} \;;;\; \underline{f = 1}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \forall a,\ b,\ c \in R}}$$

****

4º) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \end{cases}$ con α ε R, y el plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$.

a) Hallar los valores de α para los que r es paralela a π.

b) Para α = 2, hallar la distancia de r a π.

c) Para α = 1, hallar la distancia de r a π.

----

a)

Para que la recta r sea paralela al plano π es necesario que el vector $\overrightarrow{v}$ director de r sea perpendicular al vector normal del plano π, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ 1)$.

El vector $\overrightarrow{v}$ director de r es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -1,\ a)$ y $\overrightarrow{n_2}=(0,\ a,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix}=i+ak-a^2i+j=(1-a^2)i+j+ak=\underline{(1-a^2,\ 1,\ a)=\overrightarrow{v}}.$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=0 \Rightarrow (1-a^2,\ 1,\ a)\cdot(1,\ 1,\ 1)=0\ ;;\ 1-a^2+1+a=0\ ;;\ a^2-a-2=0\ ;;\ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=$$

$$=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-1}\ ;;\ \underline{a_2=2}$$

<u>La recta r es paralela al plano π para α = -1 y para α = 2.</u>

b)

Para α = 2 la recta y el plano son paralelos, por lo cual, la distancia de la recta al plano es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Para α = 2 la recta es $r \equiv \begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2y-z=4 \end{cases}$ y uno de sus puntos es P(2, 2, 0).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto $P(2,\ 2,\ 0)$ y al plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$, es:

$$d(r,\ \pi)=d(P,\ \pi)=\frac{|1\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades=d(r,\ \pi)}}$$

c)

Para α = 1 la recta es secante al plano, por lo cual su distancia es cero.

<u>Para α = -1 la distancia de r a π es cero.</u>

El punto de corte es la solución del sistema que forman.

Para α = 1 la recta es $r\equiv\begin{cases}x-y+z=0\\ y-z=4\end{cases}$.

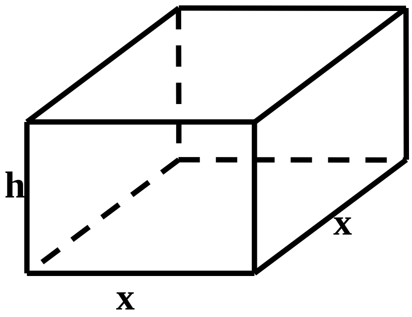
$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y+z-2=0\\ r\equiv\begin{cases}x-y+z=0\\ y-z=4\end{cases}\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\ x-y+z=0\\ y-z=4\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\ -x+y-z=0\\ y-z=4\end{array}\right\}\Rightarrow\ de\ 1^{a}\ y\ segunda\ \Rightarrow\ 2y=2\ ;;\ \underline{y=1}$$

$$y-z=4\ ;;\ 1-z=4\ ;;\ \underline{z=-3}\ ;;\ x-y+z=0\ ;;\ x=y-z=1+3=\underline{4=x}\ \Rightarrow\ \underline{Q(4,\ 1,\ -3)}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 270 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 5 euros/cm^2 y para la base un material un 50 % más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo.



La superficie lateral y la tapa tienen la siguiente superficie: $\underline{S_1 = x^2 + 4xh}$.

La superficie de la base es $\underline{S_2 = x^2}$.

El coste del material es el siguiente:

$$C = S_1 \cdot 5 + S_2 \cdot 7'5 = \left(x^2 + 4xh\right) \cdot 5 + x^2 \cdot 7'5 = 5x^2 + 20xh + 7'5x^2 = \underline{12'5x^2 + 20xh = C}$$

Para expresar el coste en función de una sola incógnita tenemos en cuenta el dato conocido del volumen:

$V = x^2 \cdot h = 270\ cm^3 \Rightarrow h = \frac{270}{x^2}$. Sustituyendo este valor en el precio:

$$C = 12'5x^2 + 20xh = 12'5x^2 + 20x \cdot \frac{270}{x^2} = 12'5x^2 + \frac{5400}{x} = \underline{\frac{12'5x^3 + 5400}{x} = C}.$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C' = \frac{37'5x^2 \cdot x - \left(12'5x^3 + 5400\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{37'5x^3 - 12'5x^3 - 5400}{x^2} = \frac{25x^3 - 5400}{x^2} = 0 \Rightarrow 25x^3 - 5400 = 0\ ;;$$

$$x^3 - 216 = 0\ ;;\ x^3 = 6^3 \Rightarrow \underline{x = 6} \Rightarrow h = \frac{270}{6^2} = \frac{270}{36} = \underline{7'5 = h}$$

Para justificar que el coste mínimo para x = 6 recurrimos a la segunda derivada:

$$C'' = \frac{75x^2 \cdot x^2 - \left(25x^3 - 5400\right) \cdot 2x}{x^4} = \frac{75x^3 - \left(50x^3 - 10800\right)}{x^3} = \underline{\frac{25x^3 + 10800}{x^3} = C''}$$

$$C''(6) = \frac{25 \cdot 6^3 + 10800}{6^3} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo, como queríamos justificar}}.$$

<u>Las dimensiones de la caja son 6 cm del lado de la base y 7’5 cm de altura.</u>

****

2º) Hallar el valor de α para que se verifique que $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+a}{2x-1} \right)^{x+5} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^3}{sen^2\, x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^3}{sen^2\, x} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x - 3x^2}{2 sen\, x \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x - 3x^2}{sen\,(2x)} =$$

$$= \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2-6x}{2\cos(2x)} = \frac{2-0}{2 \cdot 1} = \underline{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+a}{2x-1} \right)^{x+5} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+a}{2x-1} \right)^{x+5} = 1^{\infty} \Rightarrow Indeter. \Rightarrow \{Tipo\ \ n^{o}\ \ e\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1+1+a}{2x-1} \right)^{x+5} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x-1} + \frac{1+a}{2x-1} \right)^{x+5} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1+a}{2x-1} \right)^{x+5} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{1+\alpha}} \right)^{(x+5) \cdot \frac{2x-1}{1+\alpha} \cdot \frac{1+\alpha}{2x-1}} = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{1+\alpha}} \right)^{\frac{2x-1}{1+\alpha}} \right]^{(x+5) \cdot \frac{1+\alpha}{2x-1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \left[(x+5) \cdot \frac{1+\alpha}{2x-1} \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+5)(1+\alpha)}{2x-1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \alpha x + 5 + 5\alpha}{2x-1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\alpha) + 5 + 5\alpha}{2x-1}} = e^{\frac{1+\alpha}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{1+\alpha}{2} = 0\ ;;\ 1 + \alpha = 0\ ;;\ \underline{\underline{\alpha = -1}}$$

****

3º) Consideramos el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - y + az = 1 + a \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + 3z = a \end{cases}$.

a) Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro α.

b) Resolver el sistema para α = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha & 1+a \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de α es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6a + a - 1 + a^2 - 2 + 3 = a^2 - 5a = 0 \;\;;;\;\; a(a-5) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1 = 0} \;\;;;\;\; \underline{a_2 = 5}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 3 = n^o \; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; a = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; A' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 1 - 2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A' = 3}.$$

$$Para \;\; a = 5 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; A' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -50 + 6 - 1 + 30 - 2 + 5 = 41 - 53 = -12 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \; \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \;\; A = 2 \;\;;;\;\; Rango \;\; A' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para α = 1 es $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1 \cdot (1-5)} = \frac{-6+1-1+1-2+3}{-4} = \frac{-4}{-4} = \underline{\underline{1 = x}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{6+1+2-1-2-6}{-4} = \frac{0}{-4} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = \underline{\underline{0 = z}} \quad \Rightarrow \{C_1 = C_3\}$$

****

4º) Dados el punto P(1, 1, -1) y la recta $r \equiv x = \frac{y+6}{4} = z-3$ y el plano $\pi \equiv 6x+6z-12=0$, se pide:

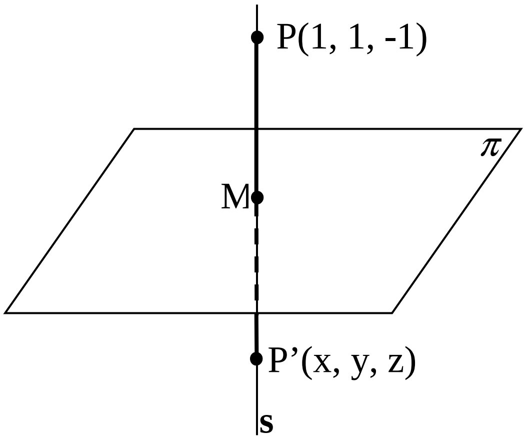
a) Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π.

b) Hallar los puntos Q de r que distan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades de longitud de π.

----

a)

El plano π puede expresarse de forma simplificada como $\pi \equiv x+z-2=0$.



Un vector normal al plano π es el siguiente: $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ 1)$.

La recta s es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ 1)$ normal del plano; su ecuación por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1+\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x+z-2=0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1+\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1+\lambda)+(-1+\lambda)-2=0\ ;;\ 1+\lambda-1+\lambda-2=0\ ;;\ 2\lambda-2=0\ ;;\ \underline{\lambda=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} x = 1+1=2 \\ y = 1 \\ z = -1+1=0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{M(2,\ 1,\ 0)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q-P = P'-Q\ ;;\ (2,\ 1,\ 0)-(1,\ 1,\ -1) = (x,\ y,\ z)-(2,\ 1,\ 0)\ ;;$$

$$(1,\ 0,\ 1) = (x-2,\ y-1,\ z-0) \Rightarrow \left. \begin{cases} x-2=1 \rightarrow \underline{x=3} \\ y-1=0 \rightarrow \underline{y=1} \\ z-0=1 \rightarrow \underline{z=1} \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(3,\ 1,\ 1)}}$$

b)

En primer lugar, vamos a encontrar dos planos π_1 y π_2, paralelos a π y que disten $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades de π.

Los planos π_1 y π_2 tiene por ecuaciones $\pi_1 \equiv x+z+D_1=0$ y $\pi_2 \equiv x+z+D_2=0$.

Sabiendo que la distancia entre dos planos paralelos viene dada por la fórmula $d(\pi_1,\ \pi_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, la distancia entre los planos π_1 y π_2 tiene que ser $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades:

$$d(\pi,\ \pi_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|D-(-2)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{|D+2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |D+2|=1 \Rightarrow \begin{cases} D_1+2=1 \to \underline{D_1=-1} \\ -D_2-2=1 \to \underline{D_2=-3} \end{cases}.$$

Los planos buscados son $\pi_1 \equiv x+z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x+z-3=0$.

Los puntos Q de la recta r pedidos son las intersecciones de la recta r con los planos $\pi_1 \equiv x+z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x+z-3=0$, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+z-1=0 \\ r \equiv x=\frac{y+6}{4}=z-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+z-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-6+4\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+3+\lambda-1=0 \ ;;\ 2\lambda+2=0 \ ;;\ \underline{\lambda=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x=-1 \\ y=-6+4\cdot(-1)=-10 \\ z=3-1=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q_1(-1,\ -10,\ 2)}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+z-3=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-6+4\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda-3+\lambda+3=0 \ ;;\ 2\lambda=0 \ ;;\ \underline{\lambda=0} \Rightarrow \left.\begin{cases} x=0 \\ y=-6 \\ z=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q_2(0,\ -6,\ 3)}}.$$

****