PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

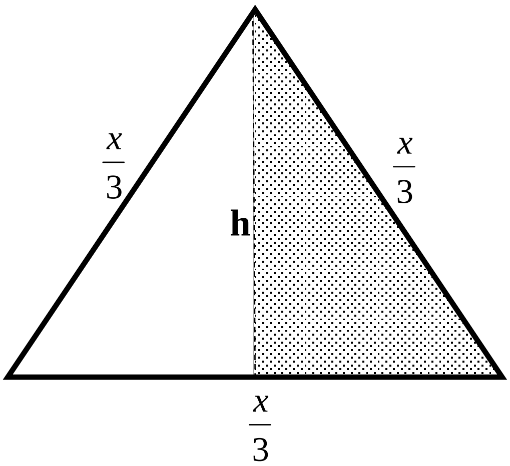
1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

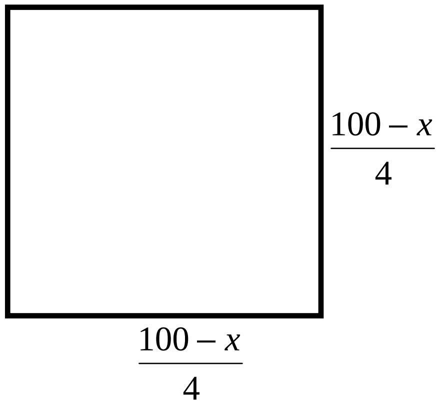
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Se divide un alambre de 100 metros de longitud en dos segmentos de x y 100 – x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero, y con el otro un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas. ¿Para qué valor de x dicha suma es mínima?





$$h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{36}}=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{36}}=\sqrt{\frac{3x^2}{36}}=\underline{\frac{\sqrt{3}\ x}{6}=h}$$

$$f(x)=S_{triángulo}+S_{cuadrado}=\frac{\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\ x}{6}}{2}+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}\ x^2}{36}+\frac{10000-200x+x^2}{16}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}\ x^2+90000-1800x+9x^2}{2^4\cdot 3^2}=\underline{\frac{1}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3}+9\right)x^2-1800x+90000\right]=f(x)}.$$

Por tratarse de una función polinómica, su dominio es R; sin embargo, en el caso que nos ocupa, su dominio lógico es $D(f)\Rightarrow(0,\ 100)$.

<u>Nota</u>: Se excluyen los valores 0 y 100 por no cumplir las condiciones del problema, es decir, no habría un triángulo y un cuadrado.

$$f'(x)=\frac{1}{144}\cdot\left[2\left(4\sqrt{3}+9\right)x-1800\right]\ ;;\ \ f'(x)=0\ \Rightarrow\ 2\left(4\sqrt{3}+9\right)x=1800\ ;;\ \underline{x=\frac{900}{4\sqrt{3}+9}}.$$

Para justificar que se trata de un mínimo vamos a probar que la segunda derivada es positiva para el valor de x hallado:

$$f''(x)=\frac{1}{144}\cdot 2\left(4\sqrt{3}+9\right)=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}>0,$$ como queríamos probar.

El valor aproximado de x es $x=\frac{900}{4\sqrt{3}+9}\cong 56'50$.

<u>La suma de las áreas es mínima para x = 56’50 metros.</u>

****

2º) Determinar la función f tal que $f'(x)=\frac{x^4+x+1}{x^2+x}$ y con f(1) = 2.

$f(x)=\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}\cdot dx \Rightarrow$ Realizando la división:

$$\begin{array}{rrrr|l}
+x^4 & & +x & +1 & x^3+x \\ \cline{5-5}
-x^4 & -x^3 & & & x^2-x+1 \\ \cline{1-4}
0 & -x^3 & +x & +1 & \\
 & +x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +x^2 \quad +x & +1 & \\
 & & -x^2 \quad -x & & \\ \cline{2-4}
 & & 0 \quad 0 & +1 &
\end{array}$$

$$f(x)=\int\left(x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}\right)\cdot dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{1}{x^2+x}\cdot dx=\underline{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+I\ =\ f(x)}.$$

$$I=\int\frac{1}{x(x+1)}\cdot dx \Rightarrow \frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x^2+x}=\frac{Ax+A+Bx}{x^2+x}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ \underline{A=1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B=-1} \Rightarrow I=\int\frac{1}{x}\cdot dx-\int\frac{1}{x+1}\cdot dx=L|x|-L|x+1|=\underline{L\left|\frac{x}{x+1}\right|=I}.$$

Sustituyendo el valor de I en la expresión de f(x):

$$\underline{f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+L\left|\frac{x}{x+1}\right|+C}.$$

Sabiendo que tiene que ser f(1) = 2:

$$f(1)=2 \Rightarrow \frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+1+L\left|\frac{x}{x+1}\right|+C=2\ ;;\ \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1+L1-L2+C=2\ ;;$$

$$-\frac{1}{6}+0-L2+C=1\ ;;\ C=1+\frac{1}{6}+L2=\underline{\frac{7}{6}+L2=C}.$$

$$\underline{\underline{f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+L\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{7}{6}+L2}}$$

****

3º) a) Determinar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades del mismo.

b) Probar que el punto P(1, 1, 2) pertenece a π, y calcular la recta r perpendicular a π que pasa por P.

----

a)

La expresión general del plano π es: $\pi \equiv 12x + 3y - 4z - 7 = 0$.

Todos los planos paralelos a π, o sea, el haz de planos paralelos a π tiene por ecuación: $12x + 3y - 4z + D = 0$.

Sabiendo que la distancia entre dos planos paralelos es: $d = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, será:

$$d = \frac{|D+7|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6 \ ;; \ \frac{|D+7|}{\sqrt{144+9+16}} = 6 \ ;; \ \frac{|D+7|}{\sqrt{169}} = 6 \ ;; \ \frac{|D+7|}{13} = 6 \ ;;$$

$$|D+7| = 6 \cdot 13 = 78 \ \Rightarrow \begin{cases} D_1 + 7 = 78 \ ;; \ D_1 = 78 - 7 = \underline{71 = D_1} \\ \\ -D_2 - 7 = 78 \ ;; \ D_2 = -78 - 7 = \underline{-85 = D_2} \end{cases}.$$

Los planos pedidos son:

$$\underline{\underline{\pi_1 \equiv 12x + 3y - 4z + 71 = 0}} \ \ y \ \ \underline{\underline{\pi_2 \equiv 12x + 3y - 4z - 85 = 0}}$$

b)

Para que el punto P(1, 1, 2) pertenezca al plano π tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 12x + 3y - 4z - 7 = 0 \\ P(1, \ 1, \ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 12 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 7 = 0 \ ;; \ 15 - 15 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P \in \pi, \ \ c.q.p.}}$$

El haz de rectas perpendiculares a π tienen como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente al vector normal del plano, que es $\overrightarrow{n} = (12, \ 3, \ -4)$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 12\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \ , \ \ \forall \lambda \in R \\ z = 2 - 4\lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Discutir, y resolver en los casos que sea posible, el sistema $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 3 + 1 + 2 - 3a + 1 = -5a + 1 = 0 \;\; ;; \;\; \underline{a = \frac{1}{5}}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a \neq \frac{1}{5} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M' = 3 = n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; Determinado}}$$

$$Para \;\; a = \frac{1}{5} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M' \Rightarrow \{C_1, \; C_2, \; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 2 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = \frac{1}{5} \Rightarrow Rango \; M = 2 \;\; ;; \;\; Rango \; M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α ≠ -1, que es compatible determinado. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1 - 5a} = \frac{-2 - 6 - 3 + 2}{1 - 5a} = \underline{\underline{\frac{-9}{1 - 5a}}} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1 - 5a} = \frac{-2a + 1 + 2 + 1}{1 - 5a} = \frac{-2a + 4}{1 - 5a} = \underline{\underline{\frac{2(2 - a)}{5(1 - 5a)}}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{1-5a} = \frac{3+2-2-6a}{1-5a} = \frac{3-6a}{1-5a} = \underline{\underline{\frac{3(1-2a)}{5(1-5a)}}} = z \, .$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la función $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

a) Determinar el dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

b) Esbozar su gráfica.

----

a)

El dominio de f(x) es el conjunto de valores de x que hacen $4-x^2 \geq 0$, que es:

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow [-2,\ 2]}}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4x^2-x^4} \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4x-2x^3}{x\sqrt{4-x^2}}=\underline{\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}=0 \ ;;\ 2-x^2=0 \ ;;\ x^2=0 \ \Rightarrow\ \underline{x_1=-\sqrt{2}} \ ;;\ \underline{x_2=+\sqrt{2}}.$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en su dominio, las raíces de la primera derivada dividen el dominio en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento. Considerando el valor x = 0: $f'(0)=\frac{2(2-0^2)}{\sqrt{4-0^2}}>0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow \left(-\sqrt{2},\ +\sqrt{2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento \Rightarrow \left(-2,\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},\ 2\right)}}$$

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan la primera derivada; para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-4x\cdot\sqrt{4-x^2}-(4-2x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\frac{-4x\cdot\sqrt{4-x^2}+\frac{4x-2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=$$

$$= \frac{\frac{-4x\left(4-x^2\right)+4x-2x^3}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-16x+4x^3+4x-2x^3}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} = \frac{2x^3-12x}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} = \underline{\frac{2x\left(x^2-6\right)}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} = f''(x)}.$$

$$f''\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{-4\sqrt{2}(2-6)}{(4-2)\sqrt{4-2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 8 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=-\sqrt{2}}.$$

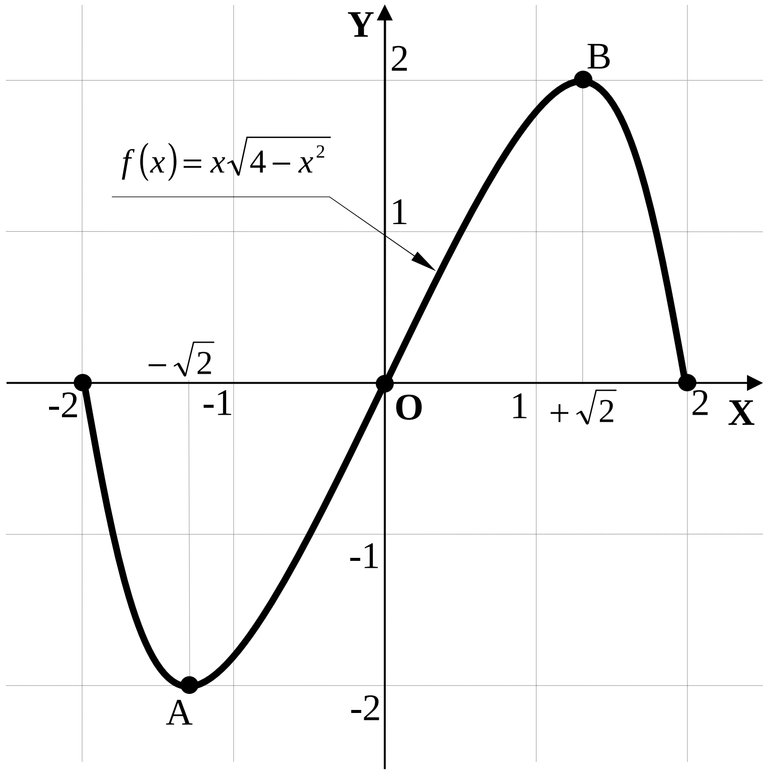
$$f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ A\left(-\sqrt{2},\ -2\right)}}.$$

Sabiendo que f(x) es simétrica con respecto al origen, por ser f(-x) = -f(x), la función tiene un máximo relativo en el punto simétrico de A con respecto al origen:

$$\underline{\underline{Máximo:\ B\left(\sqrt{2},\ 2\right)}}$$

b)

Teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas y con los datos anteriores puede esbozarse su gráfica, que es la que indica la figura.



****

2º) Determinar el área limitada por la parábola de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

Nótese que la parábola no es una función, lo cual dificulta el cálculo del área pedida. Para facilitar el ejercicio puede considerarse la condición de que el área que limitan dos funciones es la misma que limitan sus funciones inversas.

Sabiendo que la función inversa de una función dada es la que se obtiene al cambiar la “x” por la “y” y la “y” por la “x”, despejando nuevamente la “y”.

La función inversa de $y^2 = x$ es: $x^2 = y \Rightarrow \underline{y = x^2}$.

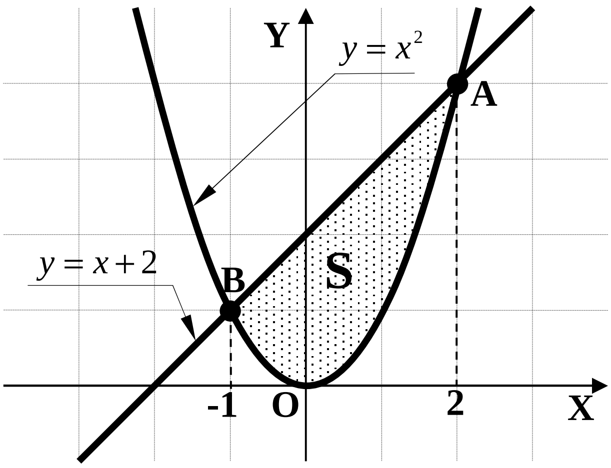
La función inversa de $y = x - 2$ es: $x = y - 2 \Rightarrow \underline{y = x + 2}$.

El área pedida es la misma que la que limitan las funciones $y = x^2$ e $y = x + 2$.

En primer lugar dibujamos la situación, para lo cual determinamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x + 2 \;\;;;\;\; x^2 - x - 2 = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. .$$

Los puntos de corte son: A(2, 4) y B(-1, 1).



Todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la parábola en el intervalo determinado por los límites de integración que es el siguiente: (-1, 2). El área pedida es:

$$S = \int_{-1}^{2} (x+2) \cdot dx - \int_{-1}^{2} x^2 \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} =$$

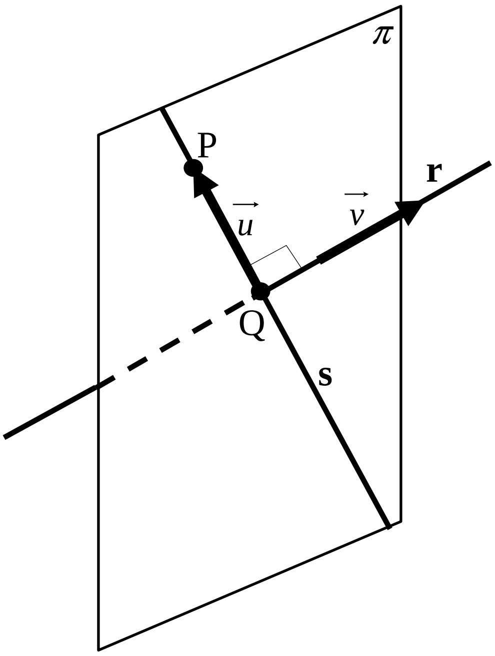
$$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = \underline{\underline{4'5\ u^2 = S}}.$$

****

3º) Determinar la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2, -1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

La situación del problema está representada en la figura adjunta.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es de la forma siguiente:



$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z \;\Rightarrow\; r \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 2,\ 1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por vector normal el vector director de r; su expresión es de la forma: $\alpha \equiv 2x+2y+z+D=0$.

De todos los infinitos planos del haz anterior, el plano π que contiene al punto P(2, -1, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x+2y+z+D=0 \\ P(2,\ -1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2+2\cdot(-1)+1+D=0 \;;;\; 4-2+1+D=0 \;;;\; 3+D=0 \;;;$$

$\underline{D=-3} \;\Rightarrow\; \underline{\pi \equiv 2x+2y+z-3=0}$.

El punto Q de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+2y+z-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(2+2\lambda)+2\cdot(1+2\lambda)+\lambda-3=0 \;;;$$

$$4+4\lambda+2+4\lambda+\lambda-3=0 \;;;\; 9\lambda+3=0 \;;;\; 3\lambda+1=0 \;;;\; \underline{\lambda=-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \underline{Q\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}$$

Un vector $\overrightarrow{u}$ director de la recta s puede ser cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{u'}$ que determinan los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right) - (2,\ -1,\ 1) = \left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} = (1,\ -2,\ 2)}.$$

La recta pedida s pasa por P y tiene como vector director $\overrightarrow{u}$: $\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}}}$.

****

4º) a) Si se sabe que el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ vale 5, calcular razonadamente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2x2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^T$ ($A^T =$ traspuesta de la matriz A), ¿puede ser el determinante de A = 3?

----

a)

Sabiendo que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta, sería: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Una propiedad de los determinantes es que si se multiplica o divide una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}.$$

Otra propiedad de los determinantes es la siguiente: si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+a_3 & b_2+b_3 & c_2+c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-5}}.$$

En el ejercicio anterior se han tenido en cuenta las siguientes propiedades de los determinantes:

1.- Si un determinante tiene dos líneas iguales o proporcionales, su valor en cero.

2.- Si se intercambian entre sí dos líneas de un determinante, su valor cambia de signo.

b)

$A^{-1} = A^T \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot A^T \;\;;;\;\; I = A \cdot A^T \;\;;;\;\; |I| = |A \cdot A^T| \Rightarrow |I| = |A| \cdot |A^T|.$$

En el apartado anterior se ha tenido en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

Teniendo en cuenta que el determinante de la matriz unitaria es 1 y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta:

$$1 = |A| \cdot |A| = |A|^2 \Rightarrow \underline{|A| = \pm 1}.$$

<u>Lo anterior demuestra que el determinante de A no puede ser 3.</u>

<u>(Independientemente del tamaño de la matriz A)</u>

****