

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Calcular el área de la región finita y limitada por la gráfica de  $f(x)=x^3-x+1$  y la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

-----

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow m=f'(1)=3 \cdot 1^2-1=3-1=\underline{2=m}.$$

$$\text{El punto de tangencia es: } f(1)=1^3-1+1=1 \Rightarrow \underline{A(1, 1)}.$$

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula  $y-y_0=m(x-x_0)$ , que aplicada al caso que nos ocupa es:

$$t \equiv y-1=2(x-1) \;; \; y-1=2x-2 \Rightarrow \underline{\text{Recta tangente: } y=2x-1}.$$

Los puntos de corte de la función y su tangente se obtienen de la ecuación que

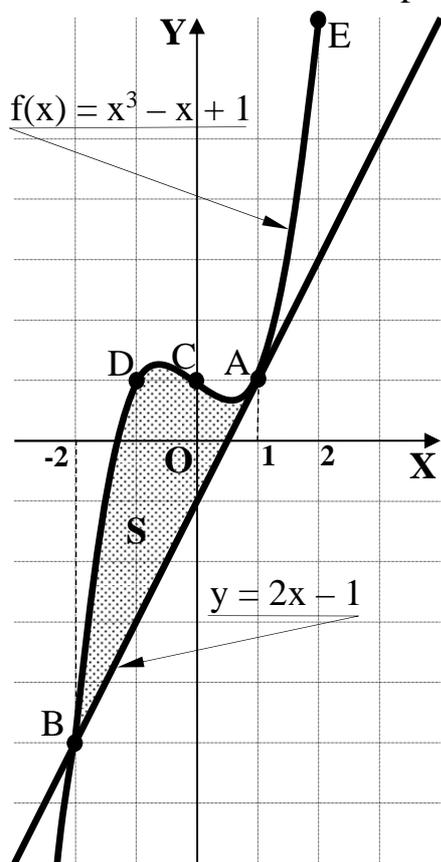
resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - x + 1 = 2x - 1 \ ; \ ; \ x^3 - 3x + 2 = 0. \text{ Resolviendo por Ruffini:}$$

	1	0	-3	2
1	1	1	1	-2
	1	1	-2	0
1	1	1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Los puntos de corte son A(1, 1), que es el punto de tangencia, y B(-2, -5).

Como no hay más puntos de corte, las ordenadas del intervalo (1, -2) tienen que ser todas mayores en la función o en la tangente; para averiguarlo consideramos un valor sencillo del intervalo, por ejemplo,  $x = 0$ :  $f(0) = 1$ ;  $y(0) = -1$ . Las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes a la tangente.



Otros puntos de la función son C(0, 1), D(1, 1) y E(2, 7). La representación gráfica de la situación, aproximadamente, es la que se indica en la figura adjunta.

El valor de la superficie pedida es:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [f(x) - y] \cdot dx = \int_{-2}^1 [(x^3 - x + 1) - (2x - 1)] \cdot dx = \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) \cdot dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left( \frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - \left[ \frac{(-2)^4}{4} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right] = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - \left( \frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4 \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1 - 6 + 32}{4} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

2º) a) Estudiar si la función  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ , verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Enunciar dicho teorema.

b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$ .

-----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$  y si se cumple que  $f(a) = f(b)$ , existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

La función  $f(x)$  es continua en  $[0, 2]$ , excepto para  $x = 1$ , cuya continuidad es dudosa, y que vamos a determinar a continuación.

Para que la función  $f(x)$  sea continua para  $x = 1$  tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x=1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 \right) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua}$$

para  $x = 1$ .

$f(x)$  es continua y derivable en  $[0, 2]$  por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle en el intervalo considerado.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = \sqrt{0} = 0 \\ f(2) = -\frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{2} \cdot 2 - 1 = -6 + 7 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(0) = f(2)}.$$

La función  $f(x)$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, 2]$ .

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - e^{-x} - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\cos 0 - e^{-0} - 0}{0 \cdot \operatorname{sen} 0} = \frac{1 - 1}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen}(2x) + e^{-x} - 1}{1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x} = \frac{-2 \operatorname{sen} 0 + e^{-0} - 1}{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1} = \frac{-0 + 1 - 1}{0 + 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos(2x) - e^{-x}}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{-4 \cdot 1 - 1}{1 + 1 - 0} = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}.$$

\*\*\*\*\*

3º) a) Calcular el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ .

b) Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3 x 3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de 5B y el de B<sup>2</sup>.

-----

a)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Restando a cada fila la anterior} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Restando de nuevo a cada fila la anterior} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } A = 2.}}$$

b)

Sabiendo que B es de dimensión 3 x 2 y que  $|B| = 4$ :

$$|5B| = 5^3 \cdot |B| = 125 \cdot 4 = \underline{\underline{500}} = |5B|.$$

Se han tenido en cuenta las siguientes propiedades:

1ª . - Si una matriz se multiplica por un número, todos sus elementos quedan multiplicados por dicho número.

2ª . - Si una línea de un determinante (fila o columna) se multiplica por un número real, el determinante queda multiplicado por dicho número.

$$|B^2| = |B \cdot B| = |B| \cdot |B| = 4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}} = |B^2|.$$

Nos basamos en la propiedad que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

\*\*\*\*\*

4°) a) Determinar la posición relativa de la recta  $r \equiv \begin{cases} y-x=1 \\ z-2x=0 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x-y=0$ .

b) Hallar el plano  $\alpha$  perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $r$ .

-----

a)

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  determinan el sistema  $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ .

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de  $M$  y  $M'$  pueden presentarse los siguientes casos:

Rango  $M =$  Rango  $M' = 3 \rightarrow$  Secantes. (un punto en común)

Rango  $M = 2$  ;; Rango  $M' = 3 \rightarrow$  Paralelos. (ningún punto en común)

Rango  $M =$  Rango  $M' = 2 \rightarrow$  Recta contenida en plano. ( $\infty$  puntos en común)

Los rangos de  $M$  y  $M'$  son los siguientes:

$$\text{Rango } M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2}.$$

$$\text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos.

b)

El plano  $\alpha$ , por ser perpendicular a  $\pi$ , tiene como vector director al vector normal de  $\pi$ , que es  $\underline{\vec{n} = (1, -1, 0)}$ .

Un vector director de  $r$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los planos que la determinan; es el siguiente:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + 2k + j = i + j + 2k = \underline{(1, 1, 2)} = \vec{v}_r.$$

Un punto de r es:  $r \equiv \begin{cases} y - x = 1 \\ z - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{A(0, 1, 0)}.$

La expresión general del plano  $\alpha$  pedido es la siguiente:

$$\alpha(A; \vec{n}, \vec{v}_r) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2x + z + z - 2(y-1) = -2x + 2z - 2y + 2 = 0.$$

$$\underline{\underline{\alpha \equiv x + y - z - 1 = 0}}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Sea  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ .

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.

b) Esbozar su gráfica.

-----

a)

Por tratarse de una función racional, su dominio de definición es  $\mathbb{R}$ , excepto los valores de  $x$  que anulan el denominador.  $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ .

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-3) \cdot (x-1) - (x^2-3x+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = f'(x).$$

El signo de  $f'(x)$  depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo para los valores de  $x$  pertenecientes al dominio de definición.

Las raíces del numerador son  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 2$ , que considerando el dominio de la función, lo dividen en los siguientes cuatro intervalos:  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$  y  $(2, +\infty)$ .

Los signos de la derivada en los anteriores intervalos son  $(+)$ ,  $(-)$ ,  $(-)$  y  $(+)$ , respectivamente, de donde se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \Rightarrow (0, 1) \cup (1, 2)}}$$

Los máximos y mínimos relativos son los valores que anulan la primera derivada, por tanto puede tener máximos y mínimos en los puntos de abscisas 0 y 2. Para que existan los máximos o mínimos es necesario que no se anule, para esos valores, la segunda derivada. Según que la segunda derivada sea negativa o positiva, el valor determina un máximo o un mínimo relativo, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} = f''(x).$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x=0}.$$

$$f(0) = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } A(0, -3)}}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x=2}.$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 3}{2-1} = \frac{4-6+3}{1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } B(2, 1)}}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada.

$$\text{Por ser } f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\text{No tiene puntos de inflexión.}}$$

Las asíntotas son las siguientes:

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma  $y = k$ .

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} = +\infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{No tiene}}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:  $\underline{\underline{x-1=0}}$ .

Asíntotas oblicuas: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como ocurre en nuestro caso.

Son de la forma  $y = mx + n$ ; los valores de m y n se obtienen como se indica a continuación:

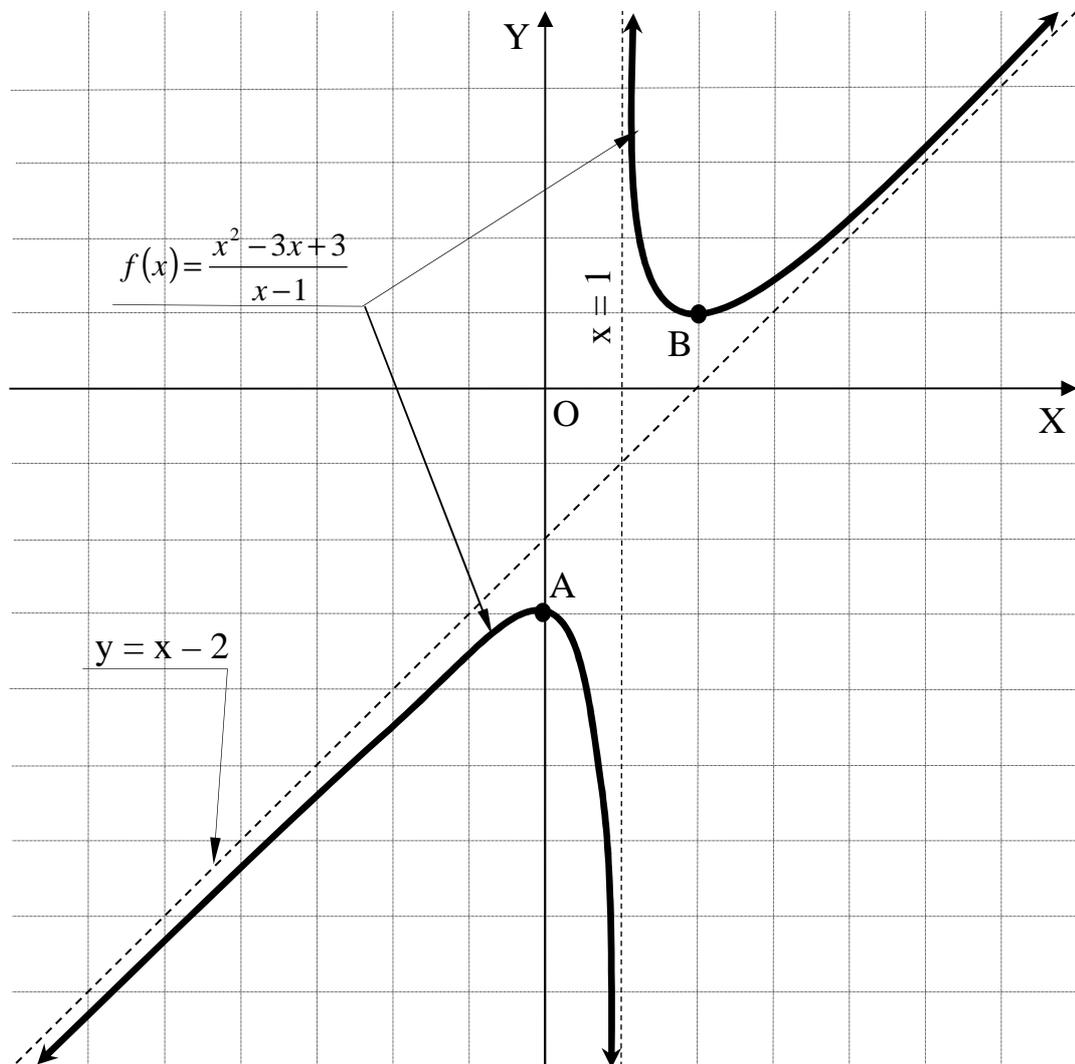
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x} = \underline{\underline{1 = m}}.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 3 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x-3} =$$

$$= -2 = n \Rightarrow \underline{\underline{\text{Asíntota oblicua: } y = x - 2}}$$

b)

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



\*\*\*\*\*

2º) a) Hallar el valor de los parámetros  $\alpha$  y  $b$  para los que  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x - ax}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

b) Calcular  $I = \int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx$ .

a)

Para que la función  $f(x)$  sea continua para  $x = 0$  tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x=0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - ax}{x^2} = \underline{0} \quad (*) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + b) = f(0) = \underline{b} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x - ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - a}{2x} = \frac{1-a}{0}$$

Según los valores de  $\alpha$  la expresión anterior tiene como valor  $\pm\infty$  o es indeterminado para  $\alpha = 1$ , que es lo lógico, ya que los parámetros dados son reales.

Para  $\alpha = 1$  el límite anterior continua de la forma siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x}{2} = 0.$$

Como tiene que ser  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , se deduce que  $b = 0$ .

Para que  $f(x)$  sea continua en  $\mathbb{R}$  tiene que ser  $\alpha = 1$  y  $b = 0$ .

b)

$$I = \int \frac{Lx}{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{x^2} dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow I = Lx \cdot \left( -\frac{1}{x} \right) - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} Lx + \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x} Lx + \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} Lx + \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} Lx - \frac{1}{x} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x} (Lx + 1) + C = I}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema: 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + my + z = m + 1 \end{cases}, \text{ según los valores del parámetro } m.$$

-----

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & m & 1 & m+1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = -1 + m - 3 + 3 + m - 1 = 2m - 2 = 0 \Rightarrow \underline{m=1}.$$

Para  $m \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

$$\text{Para } m=1 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 3 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 2}.$$

Para  $m=1 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

Resolvemos para  $m \neq 1$ , que es compatible determinado, aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ m+1 & m & 1 \end{vmatrix}}{2m-2} = \frac{-1 - (m+1) + (m+1) + m}{2(m-1)} = \frac{m-1}{2(m-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2} = x}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 1 \end{vmatrix}}{2m-2} = \frac{(m+1) - 3 + (m+1) - 1}{2(m-1)} = \frac{2m+2-4}{2(m-1)} = \frac{2m-2}{2(m-1)} = \frac{2(m-1)}{2(m-1)} = \underline{\underline{1 = y}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & m & m+1 \end{vmatrix}}{2m-2} = \frac{-(m+1)+m+3-(m+1)}{2(m-1)} = \frac{-2m-2+m+3}{2(m-1)} = \frac{1-m}{2(m-1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}} = z}.$$

Resolvemos ahora para  $m = 1$ , que es compatible indeterminado; es sistema resul-

ta ser 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \end{cases} .$$

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y parametrizando una variable, por ejemplo  $z = \lambda$ , resulta:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 - \lambda \\ x - y = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 1 \;; \; \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}} \;; \; y = 1 - \lambda - x = 1 - \lambda - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \lambda}} = y .$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R}}$$

\*\*\*\*\*

4º) a) Hallar la recta  $r$  que pasa por el punto  $A(1, -1, 0)$ , está contenida en el plano  $\pi \equiv x + y = 0$ , y corta a la recta  $s \equiv x = y = z$ .

b) Hallar la distancia del punto  $B(2, -2, 2)$  a la recta  $s$ .

-----

a)

El plano  $\pi \equiv x + y = 0$  y la recta  $s \equiv x = y = z$  son secantes por ser el vector normal del plano,  $\vec{n} = (1, 1, 0)$ , y el vector director de  $s$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ , linealmente independientes y no ser perpendiculares.

De la observación de las ecuaciones del plano  $\pi$  y la recta  $s$  se deduce que su punto de corte es el origen de coordenadas.

La recta  $r$  pedida es la que pasa por los puntos  $O(0, 0, 0)$  y  $A(1, -1, 0)$ , cuyo vector director es  $\vec{w} = (1, -1, 0)$ .

La expresión de  $r$  dada por unas ecuaciones paramétricas es:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

b)

La distancia del punto  $B(2, -2, 2)$  a la recta  $s$  viene dada por la siguiente fórmula:

$d(B, s) = \frac{|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ , siendo  $P$  un punto de la recta  $s$  y  $\vec{v}$  un vector director de la recta  $s$ .

Un punto de la recta  $s$  es  $P(0, 0, 0)$  y un vector director de  $s$  es  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ .

$\overrightarrow{BP} = P - B = (-2, 2, -2)$ .

$$d(B, s) = \frac{|\overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2i - 2j - 2k - 2k + 2i + 2j|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|4i - 4k|}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4^2 + (-4)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ unidades} = d(B, s).$$

\*\*\*\*\*