PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2013

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^T$, $B^T \cdot C$ y $B \cdot C$.

b) Hallar α para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = 4C$ de tres ecuaciones y dos incógnitas x, y, sea compatible determinado y resolverlo para ese valor de α.

----

a)

$$B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}. \quad C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}}}.$$

$$B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}}}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{No es posible el producto}}}$$

Nota: Para que el producto de dos matrices pueda efectuarse el número de columnas de la primera tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

b)

$$x \cdot A + y \cdot B = 4C \Rightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ \alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ -y \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+3y=4 \\ x-y=8 \\ ax-4y=4 \end{matrix}\right\} .$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que sea compatible determinado es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean ambos iguales a dos.

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{pmatrix}$; para que su rango sea 2 es necesario que su determinante sea cero:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ a & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -8-16+24a+4a+64-12=0 \;;;\; 28a=-28 \Rightarrow \underline{a=-1} .$$

<u>Para que el sistema dado sea compatible determinado tiene que ser α = -1.</u>

Para α = -1 el sistema resulta ser $\left.\begin{matrix} 2x+3y=4 \\ x-y=8 \\ -x-4y=4 \end{matrix}\right\}$. Despreciando la primera ecuación y resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-32+4}{-4-1} = \frac{-28}{-5} = \underline{\underline{\frac{28}{5} = x}} . \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{4+8}{-4-1} = \frac{12}{-5} = \underline{\underline{-\frac{12}{5} = y}} .$$

****

2º) Sean los puntos A(1, 2, -1), P(0, 0, 5), Q(1, 0, 4) y R(0, 1, 6).

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A, es paralela al plano π que pasa por los puntos P, Q y R, y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.

b) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa π por P, Q y R.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 0,\ 4) - (0,\ 0,\ 5) = (1,\ 0,\ -1)$.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (0,\ 1,\ 6) - (0,\ 0,\ 5) = (0,\ 1,\ 1)$.

Los puntos P, Q y R determinan el plano $\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;;

$z - 5 + x - y = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\pi \equiv x - y + z - 5 = 0}$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$,

El vector director de la recta r es de la forma $\overrightarrow{v_r} = (2m,\ m,\ a)$.

Por ser r paralela a π, el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r} = (2m,\ m,\ a)$ y el vector normal del plano $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$ son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1,\ -1,\ 1) \cdot (2m,\ m,\ a) = 0$;; $2m - m + a = 0$;; $\underline{a = -m} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)}$.

La recta r, expresada por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}}}$$

b)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\ \pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicándola al plano $\pi \equiv x - y + z - 5 = 0$ y al punto A(1, 2, -1), es:

$$d(A,\ \pi)=\frac{|1\cdot 1-1\cdot 2+1\cdot(-1)-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|1-2-1-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-7|}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{3}\ unidades}}\ .$$

****

3º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+bx & si\ \ 0\le x\le 1 \\ c\,L\,x & si\ \ 1<x \end{cases}$. Halla α, b y c sabiendo que f(x) es continua en $(0,\ \infty)$, la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa $x=\frac{1}{16}$ es paralela a la recta $y=-4x+3$, y se cumple que $\int_1^e f(x)\cdot dx=2$.

Para que la función sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=1\ \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(a\sqrt{x}+b\right)=f(1)=\underline{a+b} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(c\,L\,x\right)=c\cdot 0=\underline{0} \end{cases}\right\}\Rightarrow \underline{a+b=0}. \qquad (1)$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto. Para $x=\frac{1}{16}$ la función es $f(x)=a\sqrt{x}+bx$ y la derivada $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}+b$.

La tangente tiene la misma pendiente que la recta $y=-4x+3$ por ser paralela a ella, por lo cual:

$$m=-4=f'\left(\tfrac{1}{16}\right)=\frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{16}}}+b=\frac{a\sqrt{16}}{2}+b=2a+b\ ;;\ \underline{2a+b=-4}. \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan el sistema $\left.\begin{array}{l} 2a+b=-4 \\ a+b=0 \end{array}\right\}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=-4 \\ -a-b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{a=-4}}\ ;;\ \underline{\underline{b=4}}.$$

$$\int_1^e f(x)\cdot dx=2\ \Rightarrow \int_1^e c\,L\,x\cdot dx=c\cdot\int_1^e L\,x\cdot dx=2. \qquad (*)$$

El valor de la integral indefinida $\int L\,x\cdot dx$ se obtiene mediante el método de integración por partes, del modo siguiente:

$$\int L\,x\cdot dx\ \Rightarrow \left\{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=L\,x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\to v=x \end{array}\right\}\Rightarrow Lx\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$= x\,Lx - \int dx = x\,Lx - x = \underline{x(L\,x-1)}$. Sustituyendo este valor en (*):

$$c \cdot [x(L\,x-1)]_1^e = 2 \;;;\; c \cdot \{[e \cdot (L\,e-1)] - [1 \cdot (L\,x-1)]\} = 2 \;;;\; c \cdot [e \cdot (1-1) - 0 + 1] = 2 \;;;\; \underline{\underline{c = 2}}.$$

****

4º) a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x)=x^3+3x^2-3$.

b) Probar que la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene exactamente tres soluciones reales.

----

a)

La función $f(x)=x^3+3x^2-3$, por ser polinómica es continua y derivable en su domino, que es R.

Una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando es negativa.

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0 \Rightarrow \underline{x_1=-2} \ ;; \ \underline{x_2=0}.$$

Los valores que anulan la derivada dividen el dominio de f(x) en tres intervalos en los que la función es creciente o decreciente, alternativamente, en los tres intervalos, que son $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Considerando el valor sencillo x = 1 perteneciente al intervalo $(0, +\infty)$, se tiene:

$$f'(1)=3\cdot(1+2)=6>0 \Rightarrow \underline{Creciente}.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x), que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow x\in(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow x\in(-2, 0)}}$$

b)

Sabiendo que la función $f(x)=x^3+3x^2-3$ tiene extremos relativos para x = -2 y para x = 0, según los periodos de crecimiento y decrecimiento determinados, para x = -2 tiene un máximo relativo y para x = 0 tiene un mínimo relativo.

Como quiera que f(0) = -3 y $f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-3=-8+12-3=1>0$, según el teorema de Bolzano, en el intervalo (-2, 0) la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene exactamente una raíz real (primera).

Siendo f(0) = -3 y la función f(x) creciente en (0, +∞), necesariamente la ecuación dada tiene una y solo una raíz real mayor que cero. Por ejemplo, y recurriendo de nuevo al teorema de Bolzano, $f(1)=1^3+3\cdot1^2-3=1+3-3=1>0$, lo que significa que en intervalo (0, 1) la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene una raíz real (segunda).

Por un razonamiento similar al anterior, siendo f(-2) = 1 y f(x) creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, la ecuación dada tiene una y solo una raíz real menor que -2. Por ejemplo, aplicando el teorema de Bolzano: $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 3 = -27 + 27 - 3 = -3 < 0$, lo que implica, necesariamente, que la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo (-3, -2), que es la tercera y última raíz real de la ecuación.

****

OPCIÓN B

1º) Sea $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de α la matriz A es inversible?

b) Estudiar el rango según los valores de α.

c) Hallar α para que se cumpla que $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.

----

a)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2=0 \Rightarrow \underline{a=0}.$$

$$\underline{\underline{A\ \ es\ \ inversible\ \ \forall a\in R-\{0\}}}$$

b)

Para α = 0 es $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1.

<u>Para α = 0 el rango de A es uno y para α ≠ 0 el rango de A es tres.</u>

c)

Para hallar la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ se procede por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1-F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to \frac{1}{a}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{2}F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3-F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to \tfrac{1}{a}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}=\frac{1}{2a}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Para que sea $A^{-1}=\frac{1}{4}A \Rightarrow \frac{1}{2a}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$.

****

2º) Sean los puntos P(1, 4, -1), Q(0, 3, -2) y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y-z=4 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación del plano β que pasa por el punto P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y R.

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano $\pi \equiv x-y-3=0$.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$. El punto R, por pertenecer a r, tiene la expresión de la forma: $R(1,\ 4+\lambda,\ \lambda)$.

La recta s que pasa por los puntos Q(0, 3, -2) y $R(1,\ 4+\lambda,\ \lambda)$ tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan estos dos puntos, que es $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QR}=(1-0,\ 4+\lambda-3,\ \lambda+2)=(1,\ \lambda+1,\ \lambda+2)$.

El haz de planos perpendiculares a la recta s tiene una ecuación general de la forma $\gamma \equiv x+(\lambda+1)y+(\lambda+2)z+D=0$.

De los infinitos planos que componen el haz γ, el plano β, por pasar por los puntos P y R, es el que satisface sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \equiv x+(\lambda+1)y+(\lambda+2)z+D=0 \\ P(1,\ 4,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+4(\lambda+1)-(\lambda+2)+D=0 \ ;;\ 1+4\lambda+4-\lambda-2+D=0 \ ;;$$

$\underline{3\lambda+3+D=0}$. (1)

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \equiv x+(\lambda+1)y+(\lambda+2)z+D=0 \\ R(1,\ 4+\lambda,\ \lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+(4+\lambda)(\lambda+1)+\lambda(\lambda+2)+D=0 \ ;;$$

$1+4\lambda+4+\lambda^2+\lambda+\lambda^2+2\lambda+D=0 \ ;;\ \underline{2\lambda^2+7\lambda+5+D=0}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

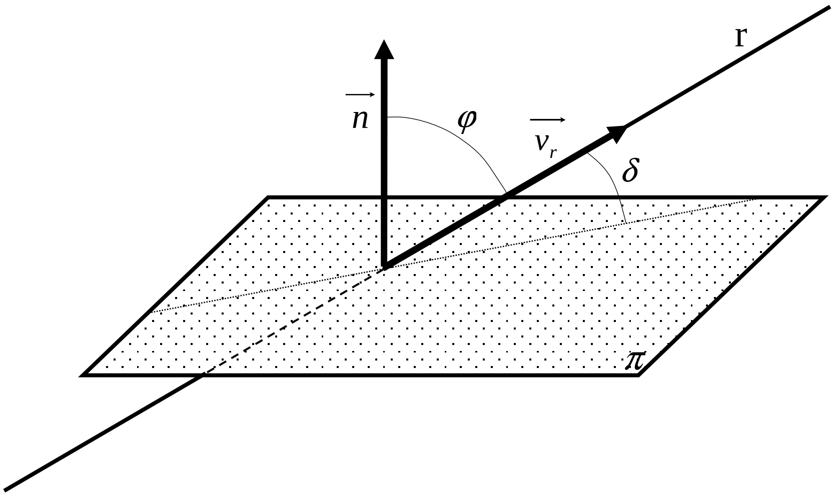
$$\left.\begin{array}{r} 3\lambda+3+D=0 \\ 2\lambda^2+7\lambda+5+D=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to D=-3\lambda-3 \\ \\ \end{array} \Rightarrow\ 2\lambda^2+7\lambda+5-3\lambda-3=0 \ ;;\ 2\lambda^2+4\lambda+2=0 \ ;;$$

$\lambda^2+2\lambda+1=0 \ ;;\ (\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \underline{\lambda=-1} \ ;;\ D=3-3=\underline{0=D}$.

El plano β pedido es: $\underline{\underline{\beta \equiv x+z=0}}$.

b)

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo δ que forman el plano $\pi \equiv x - y - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 4 \end{cases}$ es el complementario del ángulo φ que forman el vector $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$, director de r, y el vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π, que es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 0)$

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = sen\ \delta = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(0,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 0)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} =$$

$$= \frac{0-1+0}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\delta_1 = 210^o} \ ;;\ \underline{\delta_2 = 330^o}\,.$$

<u>La interpretación adecuada es el plano π y la recta r forman un ángulo de 30º.</u>

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$.

a) Calcular sus asíntotas y estudiar su crecimiento y decrecimiento.

b) Dibujar el recinto comprendido entre la recta y = 1, la gráfica de la función f(x), el eje OY y la recta x = 2; calcular el área de dicho recinto.

----

a)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x+2}=\underline{\underline{1=y}}.$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $x+2=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$.

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow R-\{-2\}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}=\underline{\frac{4}{(x+2)^2}}.$$

$$f'(x)>0,\ \forall x\in D(f)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{La\ \ función\ \ es\ \ creciente\ \ en\ \ su\ \ dominio.}}$$

b)

Para calcular la superficie pedida debemos tener en cuenta que en el intervalo correspondiente a la misma, todas las ordenadas de la asíntota horizontal y = 1 son mayores que las correspondientes ordenadas de la función, lo que facilita su cálculo, como se hace a continuación:

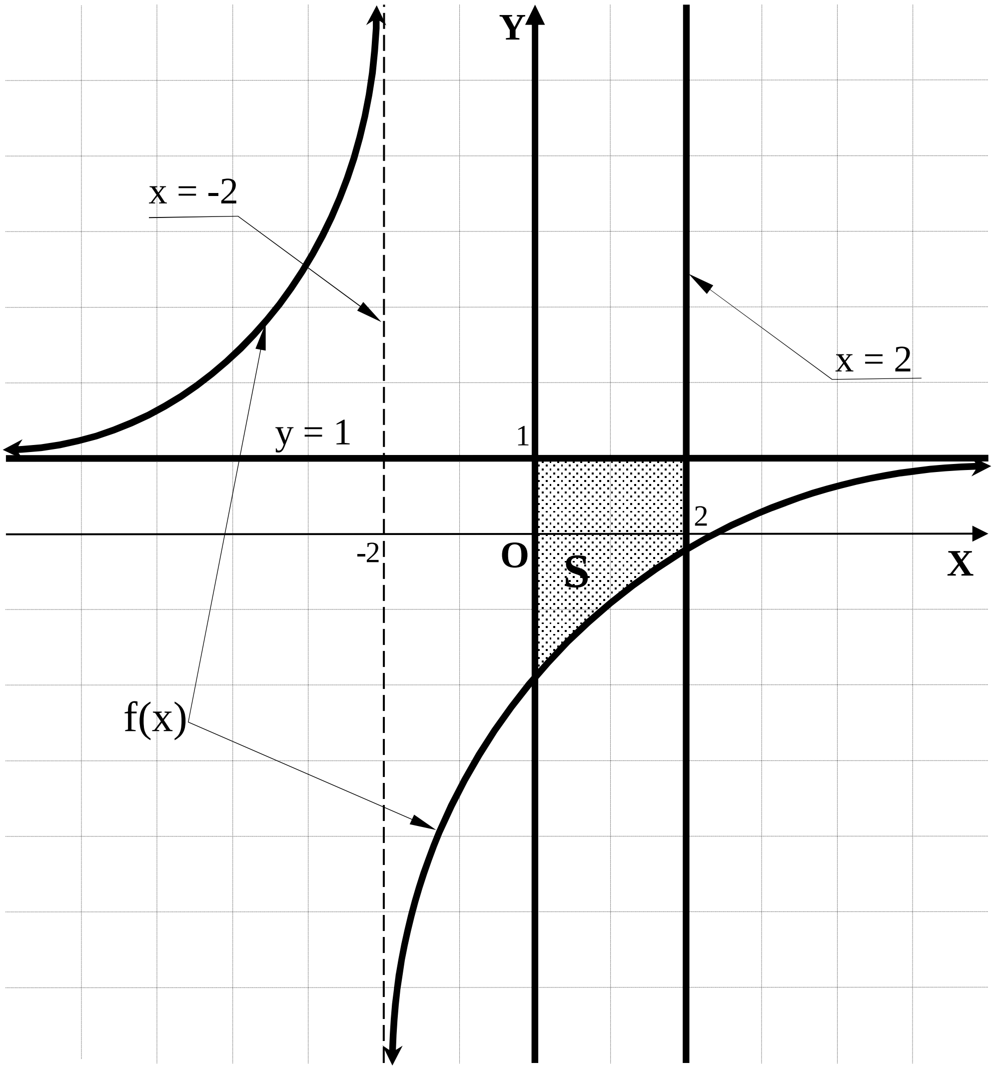
$$S=\int_0^2[1-f(x)]\cdot dx=\int_0^2\left(1-\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot dx=\int_0^2\frac{x+2-x+2}{x+2}\cdot dx=\int_0^2\frac{4}{x+2}\cdot dx.$$

Haciendo el cambio de variable adecuado, así como los límites de integración correspondientes, resulta:

$$S=\int_0^2 \frac{4}{x+2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} x+2=t & x=2\rightarrow t=4 \\ dx=dt & x=0\rightarrow t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow S=4\cdot\int_2^4 \frac{1}{t}\cdot dt=4\cdot[Lt]_2^4=4\cdot(L4-L2)=$$

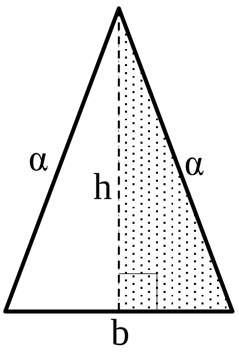
$$=4\cdot\left(L2^2-L2\right)=4\cdot(2L2-L2)=\underline{\underline{4L2\cong 2'77\ u^2=S}}\ .$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) Determinar, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.



$$S=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow Máxima\quad ;;\quad p=2a+b=6\ ;;\ \underline{a=\frac{6-b}{2}}.$$

$$h^2=\left(\frac{6-b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{36-12b+b^2-b^2}{4}=\frac{36-12b}{4}=9-3b\ ;;$$

$$h=\sqrt{9-3b}.$$

Sustituyendo el valor de h en la fórmula de la superficie, queda:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{b\cdot\sqrt{9-3b}}{2}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{9b^2-3b^3}}.$$

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{18b-9b^2}{2\sqrt{9b^2-3b^3}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2b-b^2}{b\sqrt{9-3b}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2-b}{\sqrt{9-3b}}=0\Rightarrow 2-b=0\ ;;\ \underline{\underline{b=2\ metros}}.$$

$$a=\frac{6-b}{2}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2\ metros=a}}.$$

Como se aprecia, se trata de un triángulo equilátero.

A continuación se justifica que el área es máxima.

$$S'=\frac{9}{4}\cdot\frac{2-b}{\sqrt{9-3b}}\Rightarrow S''=\frac{9}{4}\cdot\frac{-5\cdot\sqrt{9-3b}-(2-b)\cdot\frac{-5}{2\sqrt{9-3b}}}{\left(\sqrt{9-3b}\right)^2}=-\frac{45}{4}\cdot\frac{2\cdot(9-3b)+2-b}{(9-3b)\sqrt{9-3b}}=$$

$$=-\frac{45}{4}\cdot\frac{18-6b+2-b}{(9-3b)\sqrt{9-3b}}=\underline{-\frac{45}{4}\cdot\frac{20-7b}{(9-3b)\sqrt{9-3b}}=S''}$$

$$S''(2)=-\frac{45}{4}\cdot\frac{20-14}{(9-6)\sqrt{9-6}}=-\frac{45}{4}\cdot\frac{6}{3\sqrt{3}}<0\Rightarrow\underline{\underline{Máx.,\ c.q.j.}}$$

****