PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2014

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Indicaciones:

1.-Optatividad: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.-Calculadora: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que pueden reconstruirse la argumentación lógica de los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Resolver la siguiente ecuación matricial $X \cdot A = B - C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Sean F_1, F_2 y F_3 las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3,\ F_2\ \ y\ \ 2F_3$.

----

a)

$X \cdot A = B - C$. Multiplicando por la derecha los dos términos por A^{-1}:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B - C) \cdot A^{-1} \ ;;\ X \cdot I = (B - C) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (B - C) \cdot A^{-1}}. \qquad (1)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = \underline{-1}. \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\ de\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}.$$

$$B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (1) y operando:

$$X=(B-C)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+6 & 2-10\\ -2-12 & 4+20\end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix}5 & -8\\ -14 & 24\end{pmatrix}}}$$

b)

Para la resolución del apartado se van a utilizar las siguientes propiedades:

.- Si un determinante tiene dos líneas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

.- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{vmatrix}=5\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}3F_1-F_3\\ F_2\\ 2F_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3F_1\\ F_2\\ 2F_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-F_3\\ F_2\\ 2F_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3F_1\\ F_2\\ 2F_3\end{vmatrix}+0=3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{vmatrix}=6\cdot 5=\underline{\underline{30}}.$$

****

2º) Sea el punto A(1, 1, 3) y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Calcular el plano perpendicular a la recta r y que pase por A.

b) Calcular la distancia del punto A a la recta r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 0)$.

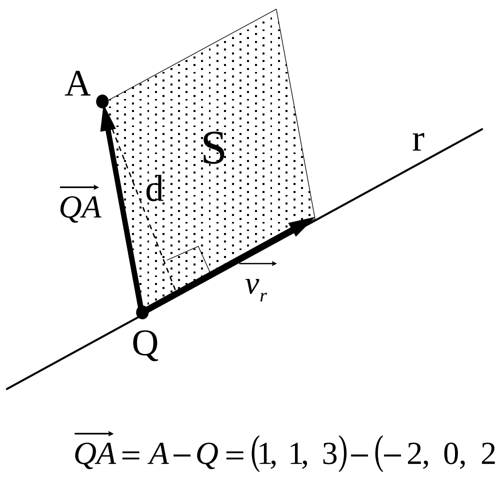
El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene como vector normal al vector director de la recta r y su expresión general es $\beta \equiv x + y + D = 0$.

De todos los infinitos planos del haz β, el plano π pedido es el que contiene al punto A(1, 1, 3), por lo cual, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + D = 0 \\ A(1,\ 1,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 1 + D = 0\ ;;\ 2 + D = 0\ ;;\ D = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x + y - 2 = 0}}.$$

b)

La distancia d del punto A a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que Q(-2, 0, 2) es un punto de r y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 0)$ es un vector director de la recta r.



Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QA}\right|$, se deduce que la distancia es: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

$\overrightarrow{QA} = A - Q = (1,\ 1,\ 3) - (-2,\ 0,\ 2) = (3,\ 1,\ 1)$.

$$d(A,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|i + k - 3k - j|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|i - j - 2k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+1+4}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{3}\ unidades = d(A,\ r)}}.$$

Otra forma de resolver el problema es el siguiente:

El punto de intersección del plano π y la recta r es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \\ \pi \equiv x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-2+\lambda) + \lambda - 2 = 0\ ;;\ -4 + 2\lambda = 0\ ;;\ -2 + \lambda = 0\ ;;\ \lambda = 2 \Rightarrow \underline{N(0,\ 2,\ 2)}.$$

La distancia entre el punto A(1, 1, 3) y la recta r es la misma que la distancia entre los puntos A y N:

$$d(A,\ r) = \overline{AN} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \underline{\underline{\sqrt{3}\ unidades}}.$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

La función está definida para cualquier valor real de x.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) son los siguientes:

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 2}.$$

Por ser $e^x \neq 0,\ \forall x \in R$, las raíces encontradas dividen el dominio de f(x) en tres intervalos que son, alternativamente, crecientes y decrecientes, por lo cual, basta con estudiar uno de ellos, por ejemplo el intervalo (0, 2), (al que pertenece el valor sencillo x = 1): $f'(1) = \frac{2-1}{e^1} = \frac{1}{e} > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son:

$$\underline{\underline{Crecimiento: x \in (0,\ 2)}} \;;;\; \underline{\underline{Decrecimiento: x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)}}$$

Los máximos y mínimos relativos de la función f(x) son los siguientes:

Un máximo relativo existe para los valores de x que cumplen que: $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}$.

Un mínimo relativo existe para los valores de x que cumplen que: $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 2}.$$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo \Rightarrow O(0,\ 0)} \\ f''(2) = \frac{4-8+2}{e^2} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo \Rightarrow A\left(2,\ \frac{4}{e^2}\right)} \end{cases}.$$

Una función tiene puntos de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

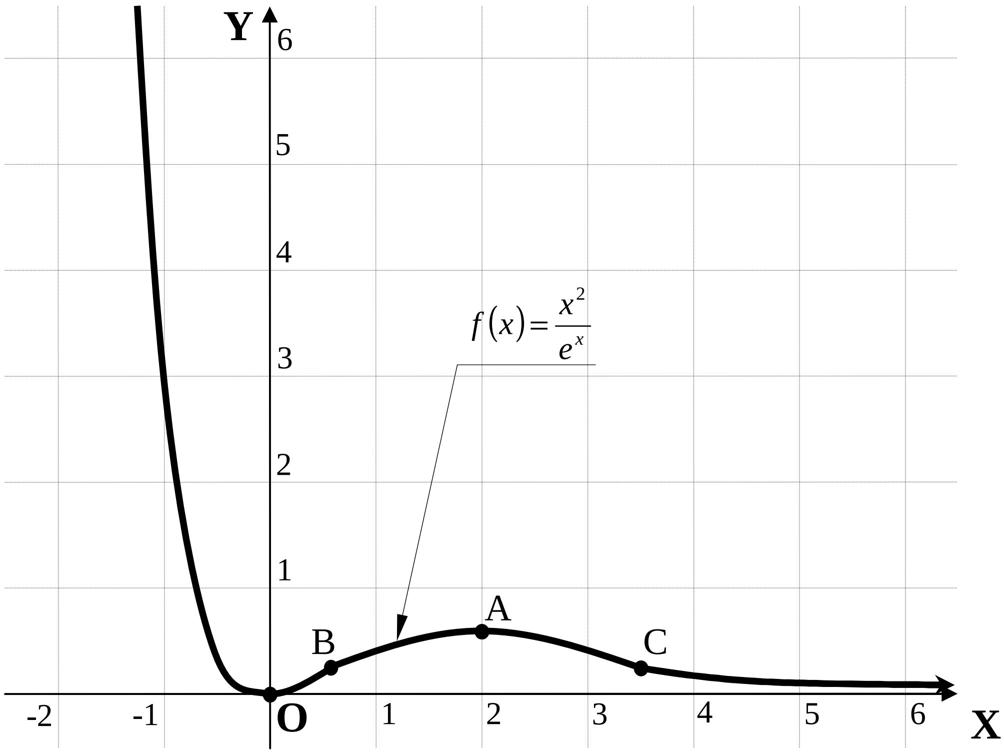
$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2 - 2x - 2x + x^2}{e^x} = \underline{\frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}}.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+2}{e^x}=0\ ;;\ x^2-4x+2=0\ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=2\pm\sqrt{2} \Rightarrow \underline{x_1=2-\sqrt{2}}\ ;;\ \underline{x_2=2+\sqrt{2}}\,.$$

$$f\left(2-\sqrt{2}\right)\cong f(0'586)=\frac{0'583^2}{e^{0'586}}=\frac{0'343}{1'796}=0'20 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I. \Rightarrow B(0'59,\ 0'20)}}.$$

$$f\left(2+\sqrt{2}\right)\cong f(3'414)=\frac{3'414^2}{e^{3'414}}=\frac{11'657}{30'393}=0'38 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I. \Rightarrow C(3'41,\ 0'38)}}.$$



Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\underline{0}\,.$$

$$y=k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}}=\underline{+\infty}\,.$$

<u>El semieje positivo OX es asíntota horizontal de f(x).</u>

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$e^x \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

Oblicuas: Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.

La función f(x) no tiene asíntotas oblicuas.

Con los datos obtenidos puede dibujarse, aproximadamente. la gráfica de f(x), que es la que aparece en la figura adjunta.

****

4º) a) Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2-x+4$ es paralela a la recta $y=5x-7$.

b) Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación $y=2x^2$ y la recta $y=2x+4$.

----

a)

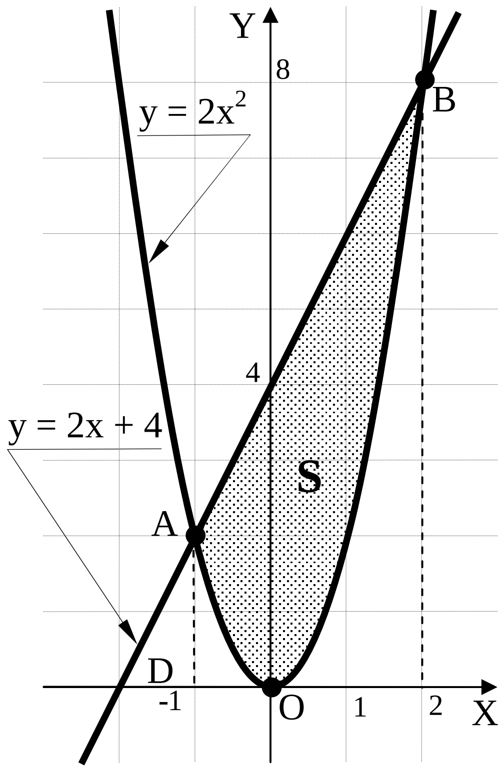
La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto. La pendiente de la recta dada es m = 2.

$$f'(x)=m \Rightarrow 2x-1=2 \;;;\; 2x=3 \Rightarrow \underline{x=\frac{3}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{2}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}+4=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+1=\frac{9-6+4}{4}=\frac{7}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{4}\right)}}.$$

b)

Los puntos de corte de la parábola y la recta son los siguientes:



$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2 \\ y=2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2=2x+4 \;;;\; 2x^2-2x-4=0 \;;;$$

$$x^2-x-2=0 \;;;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 2)} \\ x_2=2 \rightarrow \underline{B(2,\ 8)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de las dos funciones es, aproximadamente, la que indica la figura.

Como puede apreciarse, en el intervalo correspondiente al área a calcular, las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{2}\left[(2x+4)-2x^2\right]\cdot dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\cdot dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{2}=\left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 2^3}{3}+2^2+4\cdot 2\right)-\left[-\frac{2(-1)^3}{3}+(-1)^2+4\cdot(-1)\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=15-\frac{18}{3}=15-6=9\,.$$

$$\underline{\underline{S=9\ u^2}}\,.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$.

a) Discutir el sistema según los valores de m.

b) Hallar los valores de m para los que el sistema tenga alguna solución en la que x = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente, las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -1 & m & 1-2m \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro m es:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = -1}, \ \underline{m_2 = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \begin{Bmatrix} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \ A = Rango \ A' = 2 = n^o \ incóg \Rightarrow Compatible \ \det er \min ado}}.$$

Para m = -1 es $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango A = 1 y Rango A' = 2.

$$\underline{\underline{Para \ m = -1 \Rightarrow Rango \ A = 1 \ ;; \ Rango \ A' = 2 \Rightarrow Incompatible}}.$$

Para m = 1 es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango A = Rango A' = 1.

$$\underline{\underline{Para \ m = 1 \Rightarrow Rango \ A = Rango \ A' = 1 < n^o \ incóg \Rightarrow Compatible \ in\det er \min ado}}.$$

b)

Para x = 2 el sistema es $\begin{cases} 2m - y = 1 \\ -2 + my = 1 - 2m \end{cases}$. Resolviendo por igualación:

$$\left.\begin{array}{l} 2m - y = 1 \\ my + 2m = 1 + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 2m - 1 \\ \rightarrow y = \frac{3-2m}{m} \end{array} \Rightarrow \ 2m - 1 = \frac{3-2m}{m} \ ;; \ 2m^2 - m = 3 - 2m \ ;; \ 2m^2 + m - 3 = 0 \ ;;$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow \underline{\underline{m_1 = -\frac{3}{2}}}, \ \underline{\underline{m_2 = 1}}.$$

****

2º) a) Dados el punto A(3, 5, 1), la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = z+1$ y el plano de ecuación $\pi \equiv 3x-2y+5z+5=0$, determinar el punto B de π tal que la recta AB sea paralela a la recta r.

b) Hallar las coordenadas de un vector de módulo 1 que sea perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo P(1, 3, -1), Q(2, 0, 1) y R(-1, 1, 0).

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 1)$.

La expresión de la recta AB por unas ecuaciones paramétricas es $r_{AB} \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$.

El punto B pedido es la intersección del plano π con la recta r_{AB}:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x-2y+5z+5=0 \\ r_{AB} \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(3+2\lambda)-2(5+\lambda)+5(1+\lambda)+5=0 \ ;;$$

$$9+6\lambda-10-2\lambda+5+5\lambda+5=0 \ ;; \ 9\lambda+9=0 \ ;; \ \lambda+1=0 \ ;; \ \underline{\lambda=-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-2=1 \\ y=5-1=4 \\ z=1-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{B(1,\ 4,\ 0)}}.$$

b)

$$\overrightarrow{PQ} = Q-P = (2,\ 0,\ 1)-(1,\ 3,\ -1) = (1,\ -3,\ 2).$$

$$\overrightarrow{PR} = R-P = (-1,\ 1,\ 0)-(1,\ 3,\ -1) = (-2,\ -2,\ 2).$$

Un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es cualquier vector $\overrightarrow{w}$ que sea linealmente dependiente a su producto vectorial.

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6i-4j-2k-6k+4i-2j = -2i-6j-8k = (-2,\ -6,\ -8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1,\ 3,\ 4)}.$$

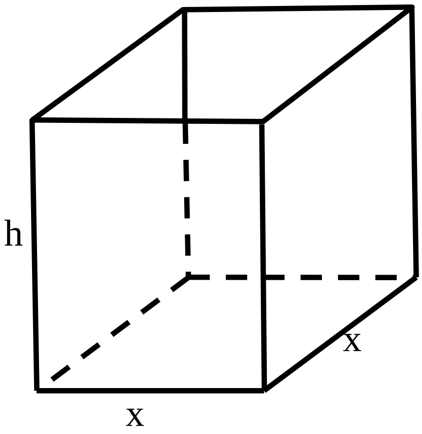
El vector pedido $\overrightarrow{m}$ es un versor de $\overrightarrow{w}$, o sea, el vector de módulo 1 de la misma dirección que $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{m} = \frac{\overrightarrow{w}}{\left|\overrightarrow{w}\right|} = \frac{(1,\ 3,\ 4)}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \frac{(1,\ 3,\ 4)}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{(1,\ 3,\ 4)}{\sqrt{26}}$.

Los dos vectores que cumplen la condición son los siguientes:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{m_1}=\left(\frac{-1}{\sqrt{26}},\ \frac{-3}{\sqrt{26}},\ \frac{-4}{\sqrt{26}}\right)}}\ \text{y}\ \underline{\underline{\overrightarrow{m_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{26}},\ \frac{3}{\sqrt{26}},\ \frac{4}{\sqrt{26}}\right)}}.$$

****

3º) Se desea construir un depósito de chapa (en forma de prisma recto, abierto y de base cuadrada) con una capacidad de 32.000 litros. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del depósito para que se precise la menor cantidad de chapa posible en su construcción?



$$V = x^2 \cdot h = 32.000\ \ell\ \ o\ \ dm^3 \Rightarrow \underline{h = \frac{32.000}{x^2}}. \qquad (*)$$

La superficie del envase es: $S = x^2 + 4xh$ y que, teniendo en cuenta el valor de h se puede poner de la forma siguiente:

$$S = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{32.000}{x^2} = x^2 + \frac{128.000}{x} = \underline{\frac{x^3 + 128.000}{x}}.$$

El coste es mínimo cuando la superficie de chapa es la menor posible.

La superficie es mínima cuando su derivada sea cero:

$$S' = \frac{3x^2 \cdot x - \left(x^3 + 128.000\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 - 128.000}{x^2} = \frac{2x^3 - 128.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 128.000 = 0\ \ ;;$$

$$x^3 - 64.000 = 0\ \ ;;\ \ x^3 = 64.000 = 40^3\ \ ;;\ \ \underline{x = 40\ dm}.$$

Sustituyendo el valor de x en (*) obtenemos el valor de h:

$$h = \frac{32.000}{40^2} = \frac{32.000}{1600} = \frac{320}{16} = \underline{20\ dm}.$$

<u>El depósito es un prisma cuadrangular regular de 40 dm de base y 20 dm de altura.</u>

****

4º) a) Enunciar e interpretar geométricamente el teorema de Rolle.

b) Hallar la primitiva de $f(x) = x^2 \cdot L\,x$ cuya gráfica pasa por el punto P(1, 2).

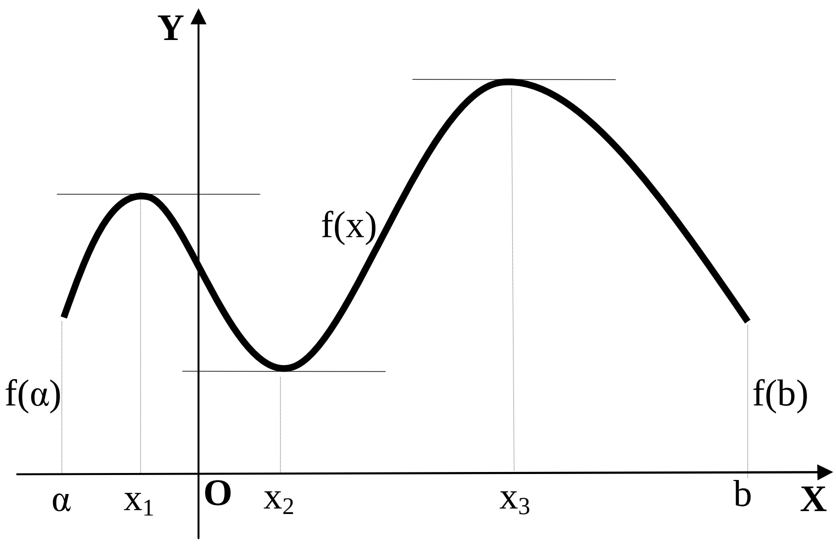
----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b) y si se cumple que f(α) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que f'(x) = 0.

La interpretación geométrica del teorema de Rolle es la que se indica en el gráfico siguiente.



Existe al menos un valor x_0 comprendido entre α y b para el cual la tangente a la curva es horizontal. Pero para que esto sea así es imprescindible que la función sea derivable en todos los puntos del intervalo.

De forma sencilla puede decirse que, si una función continua y derivable llega a la misma altura para dos valores distintos de x, en algún punto entre los dos valores tendrá tangente horizontal.

b)

$$F(x) = \int x^2 \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\,x = u \to du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x^2 \cdot dx = dv \to v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow L\,x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^3}{3} L\,x - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} L\,x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\frac{1}{9} x^3 (3L\,x - 1) + C = F(x)}$$

Si F(x) pasa por el punto P(1, 2) tiene que cumplirse que $F(1) = 2$:

$$F(1)=\frac{1}{9}\cdot 1^3\cdot(3\cdot L1-1)+C=2\ ;;\ (3\cdot 0-1)+9C=18\ ;;\ 9C=19\ ;;\ \underline{C=\frac{19}{9}}.$$

$$F(x)=\frac{1}{9}x^3(3Lx-1)+\frac{19}{9}\Rightarrow \underline{\underline{F(x)=\frac{1}{9}\left[x^3(3Lx-1)+19\right]}}.$$

****