

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2017

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa.

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} .

a)

Una función tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6.$$

La matriz A es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{6\}$.

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 54 \end{pmatrix}}}.$$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2º) a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$ y $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R.

b) Halla a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$.

a)

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(0, 1, 3) - (-1, -4, 0)] = (1, 5, 3).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1, 0, 3) - (-1, -4, 0)] = (2, 4, 3).$$

$$\pi(P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y + 4 & z \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$15(x + 1) + 6(y + 4) + 4z - 10z - 12(x + 1) - 3(y + 4) = 0;$$

$$3(x + 1) + 3(y + 4) - 6z = 0; \quad (x + 1) + (y + 4) - 2z = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0.}$$

b)

El punto $S(3, a, 2)$ pertenecerá al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$ cuando satisfaga su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0 \\ S(3, a, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + a - 2 \cdot 2 + 5 = 0; \quad 8 + a - 4 = 0;$$

$$4 + a = 0 \Rightarrow a = -4.$$

El punto S está contenido en el plano π para $a = -4$.

3º) a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$.

b) Hallar a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b \cdot \text{sen } x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para el valor $x = 0$ cuya continuidad se va a forzar, para lo cual, se va a determinar el correspondiente valor de a .

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax) = 0 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow$$

\Rightarrow La función $f(x)$ es continua en $x = 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

Se va a determinar ahora cuál o cuáles de los valores de a hacen derivable a la función para $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = 1. \quad f'(0^-) = a.$$

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 1.$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$ para $a = 1$.

b)

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot \text{sen } 0 + c = 0; \quad 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}.$$

$$f'(x) = 2ax + b \cdot \cos x.$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b \cdot \cos 0 = 1; \quad 0 + b \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}.$$

$$f''(x) = 2a - 1 \cdot \text{sen } x = 2a - \text{sen } x.$$

$$f''(0) = 2 \Rightarrow 2a - \text{sen } 0 = 2; 2a - 0 = 2; 2a = 2 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

4º a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$.

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = \frac{e^0 - e^{(0^2)}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2x \cdot e^{(x^2)}}{1} =$$

$$= \frac{e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^{(0^2)}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x} = 1.}$$

b)

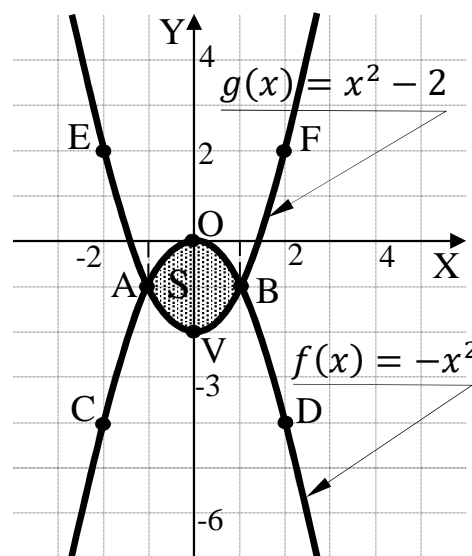
Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualdad de sus expresiones:

$$-x^2 = x^2 - 2; 2x^2 - 2 = 0; x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, -1) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, -1) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = -x^2$, cuyo vértice es el origen, también tiene otros puntos, como por ejemplo, $C(-2, -4)$ y $D(2, -4)$.

La parábola $g(x) = x^2 - 2$ tiene como vértice al punto $V(0, -2)$. Otros puntos de la parábola son $E(-2, 2)$ y $F(2, 2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $f(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x)$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^1 [-x^2 - (x^2 - 2)] \cdot dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx =$$

$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(2 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) - \left[2 \cdot (-1) - \frac{2 \cdot (-1)^3}{3} \right] = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = 4 - \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{12-4}{3} = \frac{8}{3} u^2 = S.$$

5º) De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas.

$$P = P(BB) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} = \underline{0,0667}.$$

OPCIÓN B

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro m , el sistema $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$.

b) Resolverlo para $m = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2, \forall m \in R.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I. } \forall m \in R.}$$

b)

Para $m = 1$ el sistema resulta: $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $y = \lambda$, resulta:

$$\begin{cases} x + z = -1 - \lambda \\ x + 2z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} -x - z = 1 + \lambda \\ x + 2z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow z = 2; x + 2 = -1 - \lambda; x = -3 - \lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = -3 - \lambda, y = \lambda, z = 2, \forall \lambda \in R.}$$

2º) a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3,4)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$.

b) Calcular a para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$ sean perpendiculares.

a)

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$ es $\vec{n} = (1, 1, 2)$, que también es vector director de la recta r pedida.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$.

b)

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ y $\vec{v}_s = (a, 2, 3)$.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (a, 2, 3) = 0; \quad a + 2 + 6 = 0 \Rightarrow a = -8.$$

Las rectas r y s son perpendiculares para $a = -8$.

3º) Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica.

Por tratarse de una función racional su dominio es \mathbb{R} , excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D(f) \Rightarrow \mathbb{R}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1 \Rightarrow \underline{\text{Asíntota horizontal: } y = 1.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2+2) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+2-x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}.$$

$$\text{Para } x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Crecimiento: } (0, +\infty).$$

$$\text{Para } x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Decrecimiento: } (-\infty, 0).$$

Para que una función racional tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0; \quad 2x = 0; \quad x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

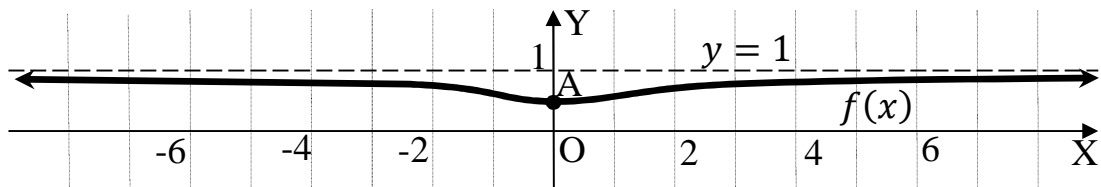
$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2+2)^2 - 2x \cdot [2 \cdot (x^2+2) \cdot 2x]}{(x^2+2)^4} = \frac{2 \cdot (x^2+2) - 8x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{2x^2+4-8x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{4-6x^2}{(x^2+2)^3} =$$

$$= \frac{2(2-3x^2)}{(x^2+2)^3}$$

$$f''(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } A\left(0, \frac{1}{2}\right)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



4°) a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \text{sen } x}{x^2}$.

b) Calcular $I = \int Lx \cdot dx$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \text{sen } x}{x^2} = \frac{0 \cdot e^0 - \text{sen } 0}{0^2} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot e^x + x \cdot e^x - \cos x}{2x} = \frac{1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 - \cos 0}{0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + \text{sen } x}{2} = \frac{e^0 + 1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 + 0}{2} = \frac{1+1+0+0}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^x - \text{sen } x}{x^2} = 1.}$$

b)

$$I = \int Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot Lx - \int dx = x \cdot Lx - x + C.$$

$$\underline{I = \int Lx \cdot dx = x(Lx - 1) + C.}$$

5º) Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara?

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = \underline{0,0833}.$$
