PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JULIO – 2018

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee. Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas). Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Tres números x, y, z cumplen lo siguiente: el primero de ellos, x, es la suma de los otros dos y, el segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución.

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r} x=y+z \\ y=\frac{x}{2}+3z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ 2y=x+6z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ x-2y+6z=0 \end{array}\right\}.$$

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para la resolución se parametriza la variable $z=\lambda$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ -x + 2y = 6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 7\lambda;$$

$x = y + \lambda = 7\lambda + \lambda = 8\lambda.$

$$\underline{Solución: x = 8\lambda, y = 7\lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R}.$$

$b)$

Para encontrar tres números concretos basta dar valores a λ.

Por ejemplo: $\underline{\lambda = 1 \Rightarrow x = 8, y = 7, z = 1;\ \ \lambda = 3 \Rightarrow x = 24, y = 21, z = 3}$.

****

2º) Dados el plano $\pi \equiv 2x+y+z-3=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$:

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r.

b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r.

----

a)

El punto de intersección del plano π y la recta r es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3+2-2+3}{2-1+1-1+2-1}=\frac{6}{2}=3.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+3-4-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{2}=\frac{4-3-3-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2.$$

$$\underline{El\ punto\ de\ intersección\ es\ P(3,-1,-2).}$$

b)

La recta s es perpendicular a r por definición y perpendicular al vector normal del plano, por lo cual, su vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial del vector normal del plano y el vector director de r.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{n_2}=(1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=i+j-k-k+i-j=2i-2k=(2,0,-2) \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,0,-1).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x+y+z-3=0$ es $\vec{n}=(2,1,1)$.

$$\overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2j + k + i - j = i - 3j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1, -3, 1).$$

Por contener la recta s al punto $P(3, -1, -2)$, (punto de corte de ambas rectas), su expresión, por ejemplo, dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda. \\ z = -2 + \lambda \end{cases}}$$

****

3º) Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}+ax+b$:

a) Encontrar a y b para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $P\left(\frac{1}{2},6\right)$.

b) Suponiendo que $a=4$ y $b=2$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas.

----

a)

Por contener al punto $P\left(\frac{1}{2},6\right)$ es $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=6 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}+a\cdot\frac{1}{2}+b=6;\;\; 2+\frac{a}{2}+b=6;\;\; \frac{a}{2}+b=4;\;\; a+2b=8. \quad (*)$$

Por tener un mínimo relativo en el punto $P\left(\frac{1}{2},6\right)$ es $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+a.$$

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+a=0;\;\; -\frac{1}{\frac{1}{4}}+a=0;\; -4+a=0 \Rightarrow \underline{a=4}.$$

Sustituyendo en la expresión (*):

$$a+2b=8;\;\; 4+2b=8;\;\; 2+b=4 \Rightarrow \underline{b=2}.$$

b)

Para $a=4$ y $b=2$ la función resulta ser $f(x)=\frac{1}{x}+4x+2=\frac{4x^2+2x+1}{x}$.

Una función racional es continua en la recta real, excepto para los valores reales que anulan el denominador.

$$\underline{f(x)\ es\ continua\ en\ R-\{0\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+1}{x}=\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x=0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2+2x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x+1}{x^2} = 4.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{4x^2+2x+1}{x} - 4x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x+1-4x^2}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x} = 2.$$

$\underline{La\ recta\ y = 4x + 2\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$

****

4º) Sea la función $f(x) = sen\ x$:

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes.

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones $y = x$ e $y = -x + \pi$.

----

a)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f(x) = sen\ x \Rightarrow f'(x) = \cos x.$$

Para $x = 0$:

Punto de tangencia: $f(0) = sen\ 0 = 0 \Rightarrow O(0, 0)$.

Pendiente: $m_1 = f'(0) = \cos 0 = 1$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) = x.$$

$$\underline{En\ el\ punto\ de\ abscisa\ x = 0\ la\ recta\ tangente\ es\ y = x.}$$

Para $x = \pi$:

Punto de tangencia: $f(\pi) = sen\ \pi = 0 \Rightarrow A(\pi, 0)$.

Pendiente: $m_2 = f'(\pi) = \cos \pi = -1$.

$$y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) = -x + \pi.$$

$$\underline{En\ el\ punto\ de\ abscisa\ x = \pi\ la\ recta\ tangente\ es\ y = -x + \pi.}$$

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = -x + \pi \end{array}\right\} \Rightarrow x = -x + \pi;\ \ 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

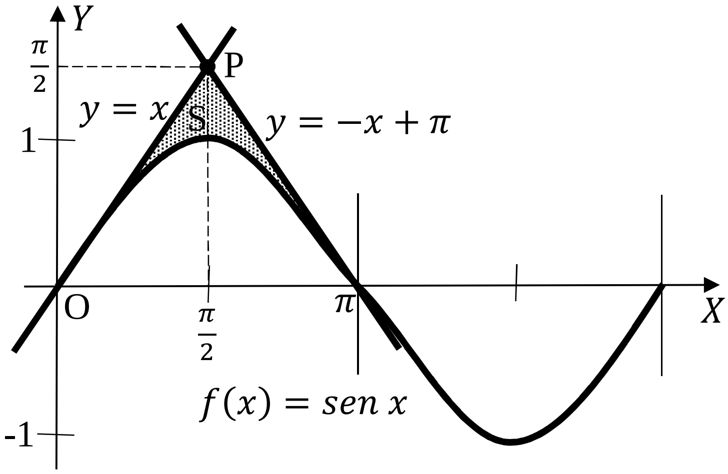
$$\underline{Punto\ de\ corte: P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).}$$

b)

De la observación de la figura adjunta se deduce que, en el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas correspondientes a las tangentes son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función. La superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x-f(x)]\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[(-x+\pi)-f(x)]\cdot dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-sen\,x)\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x+\pi-sen\,x)\cdot dx=$$



$$=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{x^2}{2}+\pi x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right]-(0+\cos 0)+\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi\pi+\cos\pi\right)-\left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\pi\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+0-1-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2-1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}-0=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4}.$$

$$\underline{S=\frac{\pi^2-8}{4}\ u^2\cong 0{,}467\ u^2.}$$

****

5º) Se lanzan tres monedas al aire:

a) Halla el espacio muestral.

b) Halla la probabilidad de:

i) Obtener más caras que cruces. ii) Obtener las mismas caras que cruces.

----

a)

$\underline{E = \{ccc,\ cc+,\ c+c,\ +cc,\ c++,\ +c+,\ ++c,\ +++\}}.$

b)

i)

Aplicando la regla de Laplace:

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{8} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$

ii)

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{0}{8} = \underline{0}.$

Es un suceso imposible que al lanzar tres monedas se obtengan las mismas caras que cruces.

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & k\end{pmatrix}$ $y\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$:

$a)$ Discutir, según los valores de k, cuando A tiene inversa y calcularla para $k=2$.

$b)$ Para $k=2$, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX+B=AB$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & k\end{vmatrix}=k-1=0 \Rightarrow k=1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall \in R-\{1\}}.$$

Para $k=2$ es $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3-F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1-F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

$b)$

$AX+B=AB;\ \ AX=AB-B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A\cdot B-B);$

$I\cdot X=A^{-1}\cdot(A\cdot B-B) \Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(A\cdot B-B)}$.

$$A\cdot B-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}-B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot (A \cdot B - B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$:

a) Encontrar $a\ y\ b$ para que la recta este contenida en el plano.

b) ¿Existen valores $a\ y\ b$ para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso.

----

a)

Si dos puntos de una recta están contenidos en un plano, la recta está contenida en el plano.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

Dos puntos de r son $A(1, 2, 3)\ y\ B = (3, 0, 5)$.

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ A(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2 - 3 + b = 0;\ \ a + b = 1. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ B(3, 0, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 0 - 5 + b = 0;\ \ 3a + b = 5. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = 5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} -a - b = -1 \\ 3a + b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2, b = -1}.$$

b)

Una recta y un plano son perpendiculares cuando el vector normal del plano es linealmente dependiente del vector director de la recta, o sea, que tienen proporcionales sus correspondientes componentes.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 1)$.

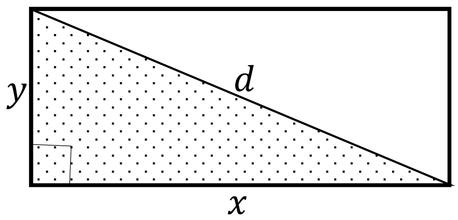
Un vector director del plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ es $\vec{n} = (a, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{v_r}\ paralelo\ a\ \vec{n} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow a = -1.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ es\ perpendicular\ al\ plano\ \pi\ para\ a = -1\ y\ \forall b \in R.}$$

****

3º) De todos los rectángulos cuyo perímetro es 40 cm, encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud.



Perímetro: $P = 2x + 2y = 40;\ \ x + y = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 20 - x.$

Por Pitágoras: $d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Sustituyendo el valor de y:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 400 - 40x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}.$$

La diagonal será mínima cuando se anule su primera derivada:

$$d'(x) = \frac{4x-40}{2\sqrt{2x^2-40x+400}} = \frac{2x-20}{\sqrt{2x^2-40x+400}}.$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-20}{\sqrt{2x^2-40x+400}} = 0;\ \ 2x - 20 = 0;\ \ x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10.$$

$$y = 20 - x = 20 - 10 = 10.$$

A continuación se justifica que por tratarse de un mínimo tiene que ser positiva la segunda derivada para el valor hallado que anula la primera derivada.

$$d''(x) = \frac{2\cdot\sqrt{2x^2-40x+400}-(2x-20)\cdot\frac{4x-40}{2\cdot\sqrt{2x^2-40x+400}}}{2x^2-40x+400} = \frac{2\cdot\sqrt{2x^2-40x+400}-\frac{(2x-20)^2}{\sqrt{2x^2-40x+400}}}{2x^2-40x+400} =$$

$$= \frac{2\cdot(2x^2-40x+400)-(4x^2-80x+400)}{(2x^2-40x+400)\sqrt{2x^2-40x+400}} = \frac{4x^2-80x+800-4x^2+80x-400}{(2x^2-40x+400)\sqrt{2x^2-40x+400}} =$$

$$= \frac{400}{(2x^2-40x+400)\sqrt{2x^2-40x+400}} = \frac{200}{(x^2-20x+200)\sqrt{2x^2-40x+400}}.$$

$$d''(10) = \frac{200}{(100-200+200)\sqrt{200-400+400}} = \frac{2}{\sqrt{200}} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo, c.q.j.}$$

$$\underline{El\ "rectángulo"\ de\ diagonal\ mínima\ es\ un\ cuadrado\ de\ lado\ 10\ cm.}$$

****

4º) a) Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - sen\, x}{e^x + x}$.

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$.

----

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - sen\, x}{e^x + x} = \frac{3e^\infty - sen\, \infty}{e^\infty + \infty} = \frac{\infty + nº\, finito}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - cos\, x}{e^x + 1} = \frac{\infty + nº\, finito}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x + sen\, x}{e^x} =$$

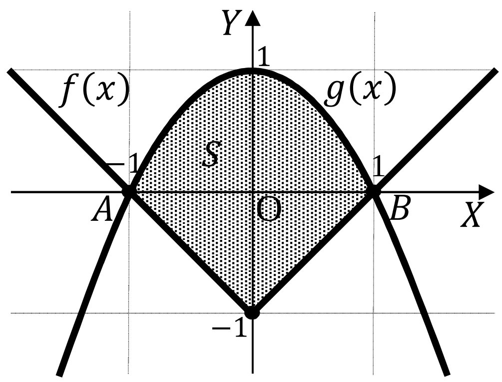
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x}{e^x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{sen\, x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{nº\, finito}{\infty} = 3 + 0 = 3.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - sen\, x}{e^x + x} = 3.}$$

b)

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $f(x) = |x| - 1$ puede redefinirse de la forma $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & si\ \ x < 0 \\ x - 1 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la figura adjunta, de la observación de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)] \cdot dx +$$

$$+ \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} [(1 - x^2) - (-x - 1)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(1 - x^2) - (x - 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (1 - x^2 + x + 1) \cdot dx + \int_{0}^{1} (1 - x^2 - x + 1) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + x + 2) \cdot dx + \int_{0}^{1} (-x^2 - x + 2) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] + \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) - 0 =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{7}{3}\, u^2 \cong 2{,}33\, u^2}.$$

****

5º) El diámetro del interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03?

----

a)

$Datos$: $\mu = 10;\ \ n = 1;\ \ \sigma = 0{,}03.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10;\ \frac{0{,}03}{\sqrt{1}}\right) = N(10;\ 0{,}03).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{0{,}03}$.

$$P = P(Z \geq 10{,}75) = P\left(Z \geq \frac{10{,}075-10}{0{,}03}\right) = P\left(Z \geq \frac{0{,}075}{0{,}03}\right) = P(Z \geq 2{,}5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = \underline{0{,}0062}.$$

b)

$$P = P(9{,}97 \leq Z \leq 10{,}03) = P\left(\frac{9{,}97-10}{0{,}03} \leq Z \leq \frac{10{,}03-10}{0{,}03}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-0{,}03}{0{,}03} \leq Z \leq \frac{0{,}03}{0{,}03}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$$

$$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1) = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 =$$

$$= 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}.$$

****