PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2010 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices cuadradas $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A\cdot(A-2I)$.

b) Justificar que: b_1) Existen las matrices inversas de A y A – 2I.

b_2) No existe la matriz inversa de la matriz A – I.

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1}=\lambda(A-2I)$.

----

a)

$$(A-I)^2=\left[\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2-3&1+2-3&1+2-3\\2+4-6&2+4-6&2+4-6\\-3-6+9&-3-6+9&-3-6+9\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(A-2I)^2}}$$

$$A\cdot(A-2I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0+2-3&2+1-3&2+2-4\\0+6-6&2+3-6&2+6-8\\-0-6+6&-3-3+6&-3-6+8\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I=A\cdot(A-2I)}}$$

b)

b1)

Para que existen las matrices inversas de A y A – 2I tienen que tener determinantes que sean distintos de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{vmatrix}=-12-6-6+9+12+4=25-24=1\neq 0\,.$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{vmatrix}=-6-6+3+8=9-12=-3\neq 0$$

<u>Las matrices A y A – 2I tienen inversa, como debíamos justificar.</u>

b2)

Para que no existe la matriz inversa de la matriz A – I, su determinante tiene que ser cero:

$$|A-I|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \{C_1=C_2=C_3\}$$

<u>La matriz A – I no tiene inversa, como debíamos justificar.</u>

c)

Calculamos, en primer lugar, la matriz inversa de A.

La matriz traspuesta de A es la siguiente: $A^t=\begin{pmatrix}2&2&-3\\1&3&-3\\1&2&-2\end{pmatrix}$.

El módulo de la matriz A es $|A|=1$.

$$Adj\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}}\,.$$

$$A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan.

b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s.

c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante de las rectas r y s.

----

a)

Se va ha realizar el estudio mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \\ x-y=5 \\ z=4 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M’, la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M’ = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M’ = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas son secantes.

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1+F_4 \\ F_2 \to F_2+F_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow |M'|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-(-50-16-1+16-5-10)=-(-66)=66\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ \ M'=4}$$

Vamos a determinar ahora el rango de M:

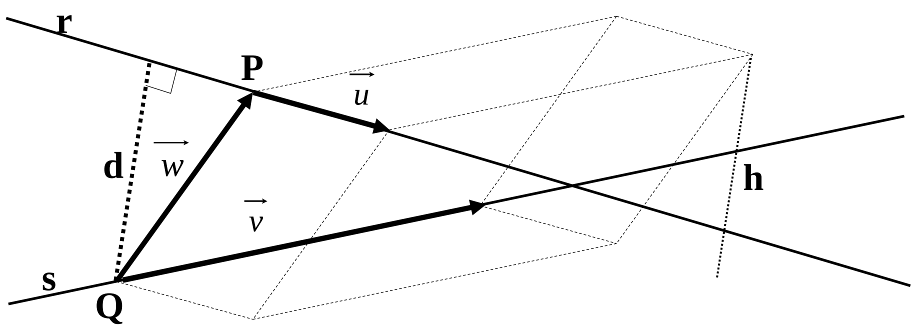
$$\{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2-1-2-5=-6 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M=3}$$

$$\underline{Rango\ M'=4\ ;;\ Rango\ \ M=3} \Rightarrow \underline{\underline{Las\ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan,\ como\ \ teníamos\ \ que\ \ justificar}}$$

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto Q de la recta r_2 y como final otro punto P de la recta r_1, tal como se observa en la figura.

En primer lugar expresamos las rectas por ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y-z=4-5\lambda \\ 2y+z=5+2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3y=9-3\lambda\ ;;\ \underline{y=3-\lambda}\ ;;\ z=y-4+5\lambda=$$

$$=3-\lambda-4-5\lambda=\underline{-1+4\lambda=z} \quad \Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases}} \ .$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=4 \end{cases}} .$$

Los vectores directores de las rectas r y s son $\overrightarrow{u}=(1,\ -1,\ 4)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 0)$, respectivamente.

Los puntos P y Q, pertenecientes a las rectas r y s, respectivamente, puede ser los siguientes: P(0, 3, -1) y Q(0, 5, 4).

El vector $\overrightarrow{w}$ que determinan los puntos P y Q es el siguiente:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (0,\ 3,\ -1) - (0,\ 5,\ 4) = (0,\ -2,\ -5).$$

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot d \ \Rightarrow \ d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|} = \frac{|-5-8-5|}{|4j+k+k-4i|} = \frac{|-18|}{|-4i+4j+2k|} = \frac{18}{\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{18}{\sqrt{36}} = \frac{18}{6} = \underline{\underline{3\ unidades = d(r,\ s)}}$$

c)

El plano π que es paralelo a las rectas r y s tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas; es por ello que su vector normal es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores directores.

$$\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4j+k+k-4i = -4i+4j+2k = (-4,\ 4,\ 2) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n} = (2,\ -2,\ -1)}.$$

La expresión general del plano π es la siguiente: $\underline{\pi \equiv 2x - 2y - z + D = 0}$.

La distancia del plano π a cada una de las rectas es la misma que la distancia del plano a cualquier punto de cada una de las rectas, respectivamente.

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación

$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola a los puntos y rectas de este caso, es:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 + 1 + D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|D-5|}{\sqrt{9}} = \underline{\frac{|D-5|}{3} = d(r,\ \pi)}.$$

$$d(s,\ \pi) = d(Q,\ \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + D|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-10 - 4 + D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|D-14|}{\sqrt{9}} = \underline{\frac{|D-14|}{3} = d(s,\ \pi)}.$$

Por ser el plano π equidistante de las recta r y s, las distancias anteriores tienen que ser iguales:

$$d(r,\ \pi) = d(s,\ \pi) \Rightarrow \frac{|D-5|}{3} = \frac{|D-14|}{3} \Rightarrow D - 5 = -D + 14\ ;;\ 2D = 19\ ;;\ \underline{D = \frac{19}{2}}.$$

Sustituyendo el valor de D en la ecuación del plano: $\pi \equiv 2x - 2y - z + \frac{19}{2} = 0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x - 4y - 2z + 19 = 0}}$$

****

3º) Se quiere construir un estadio vallado de 10.000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de un euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

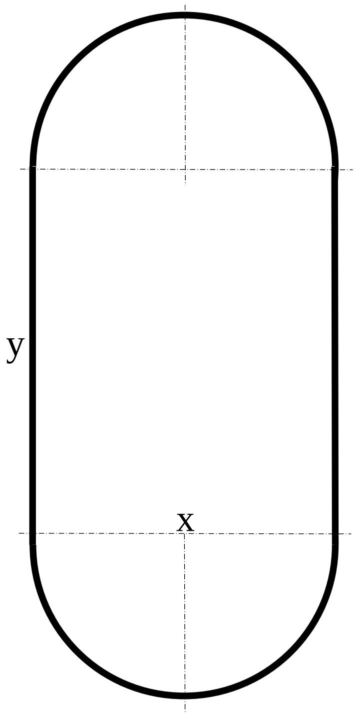
a) La longitud del perímetro del campo en función de x.

b) El coste f(x) de la valla en función de x.

c) El valor de x para que el coste de la valla sea mínimo.

----

a)



La superficie del estadio es de 10.000 m^2.

$$S = x \cdot y + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{1}{4}\pi x^2 = 10000 \Rightarrow y = \frac{10000 - \frac{1}{4}\pi x^2}{x} =$$

$$= \underline{\frac{40000 - \pi x^2}{4x} = y}$$

La longitud del perímetro del vallado en función de x es el siguiente:

$$P = 2y + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) = 2y + \pi x = 2 \cdot \frac{40000 - \pi x^2}{4x} + \pi x = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + \pi x =$$

$$= \frac{40000 - \pi x^2 + 2\pi x^2}{x} = \underline{\underline{\frac{40000 + \pi x^2}{x} = P(x)}}$$

b)

El coste del vallado en función de x es el siguiente:

$$f(x) = (2y) \cdot 1 + \left[2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right] \cdot 2 = 2y + 2\pi x = 2 \cdot \frac{40000 - \pi x^2}{4x} + 2\pi x = \frac{40000 - \pi x^2}{2x} + 2\pi x =$$

$$= \frac{40000 - \pi x^2 + 4\pi x^2}{2x} = \underline{\underline{\frac{3\pi x^2 + 40000}{2x} = f(x)}}$$

c)

Para que el coste sea mínimo tiene que ser cero el valor de su derivada:

$$f'(x)=\frac{6\pi x\cdot(2x)-(3\pi x^2+40000)\cdot 2}{4x^2}=\frac{12\pi x^2-6\pi x^2-80000}{4x^2}=\frac{6\pi x^2-80000}{4x^2}=\underline{\frac{3\pi x^2-40000}{2x^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{3\pi x^2-40000}{2x^2}=0\ ;;\ 3\pi x^2-40000=0\ ;;\ 3\pi x^2=40000\ ;;\ x=\pm\sqrt{\frac{40000}{3\pi}}=\underline{\frac{200}{\sqrt{3\pi}}=x}$$

La solución de x negativa carece de sentido.

Para justificar que el coste es mínimo tiene que ser positiva la segunda derivada para el valor encontrado de x.

$$f''(x)=\frac{6\pi x\cdot(2x^2)-(3\pi x^2-40000)\cdot(4x)}{4x^4}=\frac{6\pi x^2-(3\pi x^2-40000)\cdot 2}{2x^3}=\frac{80000}{2x^3}=\frac{40000}{x^3}$$

$$f''\left(\tfrac{200}{\sqrt{3\pi}}\right)=\frac{40000}{\left(\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\right)^3}>0\ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Mínimo,\ como\ queríamos\ justificar.}}$$

$$\underline{\underline{\mathit{El\ valor\ de\ x\ que\ produce\ el\ coste\ mínimo\ es}\ x=\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\cong 65'15\ \mathit{metros}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2ax+by+z=3c \\ 3x-2by-2cz=a \\ 5ax-2y+cz=-4b \end{cases}$, dependiente de los parámetros a, b y c, se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros a = 0, b = -1 y c = 2 el sistema es incompatible.

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica que $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$ es solución del sistema.

c) Justificar si la solución $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única.

----

a)

Para a = 0, b = -1 y c = 2 es $\begin{cases} -y+z=6 \\ 3x+2y-6z=0 \\ -2y+2z=4 \end{cases}$, o también: $\begin{cases} -y+z=6 \\ 3x+2y-6z=0 \\ -y+z=2 \end{cases}$.

De las ecuaciones primera y tercera se deduce que el sistema es incompatible.

No obstante lo anterior, vamos a justificar la incompatibilidad mediante el teorema de Rouché-Fröbenius.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3+3=0 \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M=2}.$$

Veamos ahora el rango de M':

$$Rango\ de\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-18+6=-12\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible,\ c.q.j.}}$$

b)

Para $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$ resulta: $\left\{\begin{array}{l} 2a+2b+3=3c \\ 3-4b-6c=a \\ 5a-4+3c=-4b \end{array}\right.$ equivalente a $\left.\begin{array}{r} 2a+2b-3c=-3 \\ a+4b+6c=3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{array}\right\}$.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-6-6+8+8+12-3}{4-2+10+10-8-1}=\frac{13}{13}=\underline{\underline{1=a}}.$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{78}=\frac{18-12-90+45-48+9}{78}=\frac{72-150}{78}=\frac{-78}{78}=\underline{\underline{-1=b}}.$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{78}=\frac{32-12+30+60-24-8}{78}=\frac{110-32}{78}=\frac{78}{78}=\underline{\underline{1=c}}$$

$\underline{\underline{\textit{Los valores } a=1,\ b=-1 \textit{ y } c=1 \textit{ hacen que sea } (x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)}}$

c)

Las matrices de coeficientes y ampliada de $\left.\begin{array}{r} 2a+2b-3c=-3 \\ a+4b+6c=3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{array}\right\}$ son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\ \ y\ \ A'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Del apartado anterior sabemos que el determinante de A vale 13, por lo cual, el rango de A = 2.

Veamos ahora el rango de A’:

$$\textit{Rango de } A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}=32-12+30+60-24-4=92\neq 0 \Rightarrow \underline{\textit{Rango } A'=3}.$$

$$\underline{Rango\ \ A = Rango\ \ A' = 3 = n^{o}\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \det er\min ado}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 1,\ b = -6\ \ y\ \ c = 6\ \ la\ \ solución\ \ (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3)\ es\ \ única}}$$

****

2º) Sea r la recta de vector director $\overrightarrow{u}=(2,\ -1,\ 1)$ que pasa por el punto P(0, 3, -1). Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto A(0, 1, 0) a la recta r.

b) Hallar razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P.

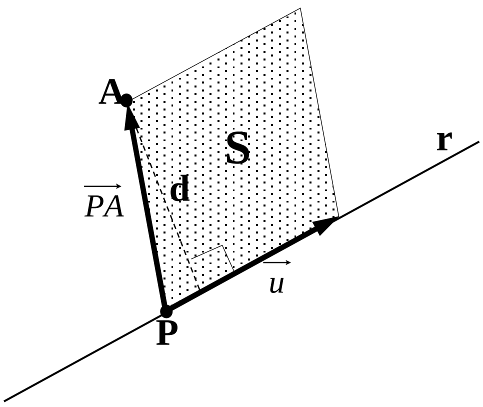
c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plazo $\pi \equiv z=0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q.

----

a)

La distancia d del punto A(0, 1, 0) a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que P(0, 3, -1) es un punto de r y $\overrightarrow{u}=(2,\ -1,\ 1)$ es el vector director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{u}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{PA}\right|$, se deduce que la distancia es: $d=\frac{\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{PA}$ en el caso que nos ocupa es:

$\overrightarrow{PA}=A-P=(0,\ 1,\ 0)-(0,\ 3,\ -1)=(0,\ -2,\ 1)$.

$$d(A,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{u}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|-i-4k+2i-2j\right|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\left|i-2j-4k\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-4)^2}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+4+16}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{21}{6}}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ unidades=d(A,\ r)}}$$

b)

La recta que pasa por P y A tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PA}=(0,\ -2,\ 1)$.

El ángulo que forman las rectas es el mismo que forman sus vectores directores.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha \;\;\Rightarrow\;\; \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$, aplicada al caso que nos ocupa:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{(2,\ -1,\ 1) \cdot (0,\ -2,\ 1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{0+2+1}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{0+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{30}} =$$

$$= 0'5477 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{\alpha = 56^{\circ}\ 47'\ 21''}}$$

c)

La recta r, expresada por unas ecuaciones paramétricas, es $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

El punto Q de corte de la recta r con el plano $\pi \equiv z = 0$ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + \lambda = 0 \;;;\; \underline{\lambda = 1} \Rightarrow \underline{Q(2,\ 2,\ 0)}.$$

El ángulo del vértice P es el hallado anteriormente, α = 56º 47’ 21’’.

$$\text{Vértice Q} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{QP} = P - Q = (0,\ 3,\ -1) - (2,\ 2,\ 0) = (-2,\ 1,\ -1) \\ \\ \overrightarrow{QA} = A - Q = (0,\ 1,\ 0) - (2,\ 2,\ 0) = (-2,\ -1,\ 0) \end{cases}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QA}}{\left|\overrightarrow{QP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{QA}\right|} = \frac{(-2,\ 1,\ -1) \cdot (-2,\ -1,\ 0)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{4-1-0}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+1+0}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{30}} = 0'5477 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{\beta = 56^{\circ}\ 47'\ 21''}}$$

<u>La igualdad de los ángulos α y β justifica lo pedido.</u>

****

3º) Dada la función polinómica $f(x)=4-x^2$, se pide obtener razonadamente:

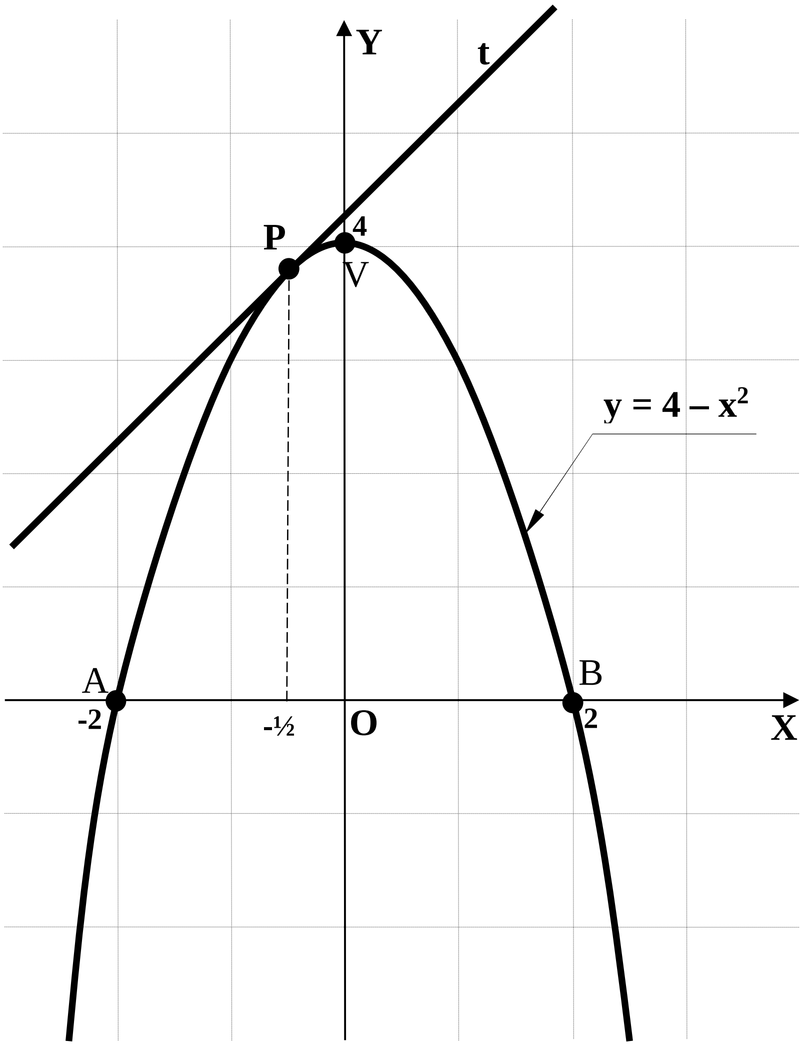
a) La gráfica de la curva $y=4-x^2$.

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta $r\equiv x+y=0$.

c) Las rectas que pasan por el punto Q(-2, 1) y son tangentes a la curva $y=4-x^2$, obteniendo los puntos de tangencia.

----

a)



La curva $y=4-x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ simétrica con respecto al eje OY, al que corta en el punto V(0, 4).

Los puntos de corte con el eje OX se obtienen igualando la función a cero:

$$y=4-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \rightarrow \underline{A(-2,\ 0)} \\ x_1=2 \rightarrow \underline{B(2,\ 0)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura de la izquierda.

b)

La recta $r\equiv x+y=0$ tiene de pendiente m = -1 y pasa por el origen de coordenadas.

Las rectas perpendiculares tienen las pendientes inversas y de signo contrario, por lo cual, la recta perpendicular a $r\equiv x+y=0$ tiene de pendiente m = 1.

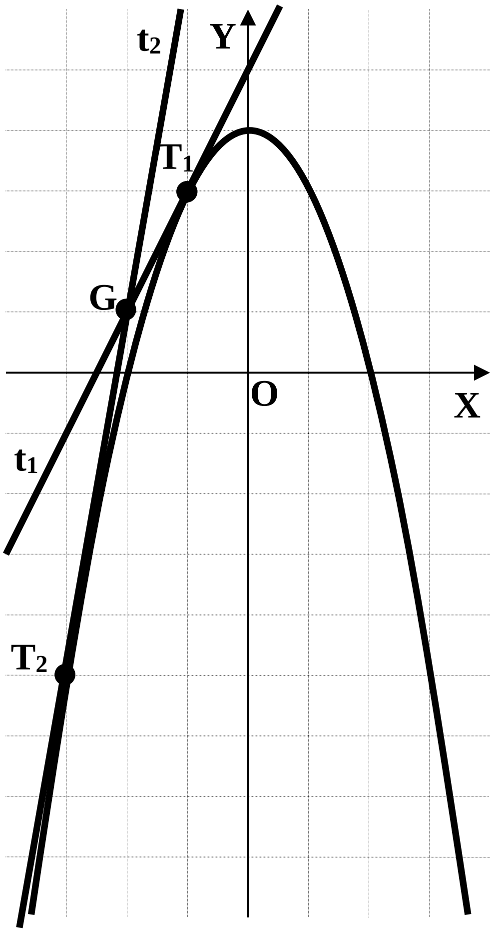
Sabiendo que la pendiente a una curva en un punto es la derivada de la curva en ese punto, por lo tanto:

$$y'=-2x=1 \Rightarrow \underline{x=-\frac{1}{2}}\ ;;\ y\left(-\tfrac{1}{2}\right)=4-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4} \Rightarrow \text{Punto de tangencia: } \underline{\underline{P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{15}{4}\right)}}.$$

El punto de tangencia así como la recta tangente t se dibujan en la figura.

c)

Las rectas que pasan por el punto Q(-2, 1) tienen por ecuación $y-1=m(x+2)$ y por ser tangentes a la curva $y=4-x^2$, su intersección es única, es decir, el punto de tangencia es uno solo.



La intersección de la curva con la recta se obtiene resolviendo el sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} y=4-x^2 \\ y-1=m(x+2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=4-x^2 \\ y=mx+2m+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4-x^2=mx+2m+1 \;;;$$

$$x^2+mx+(2m-3)=0 \;;;\; x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4(2m-3)}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ como la solución tiene que ser única, el discriminante de la expresión anterior tiene que ser, necesariamente, cero:

$$m^2-4(2m-3)=0 \;;;\; m^2-8m+12=0 \;;;\; m=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}=4\pm 2 \Rightarrow \underline{m_1=2} \;;;\; \underline{m_2=6}.$$

Sabiendo que la pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto, la pendiente de la curva es $m=y'=-2x$.

Las rectas tangentes son las siguientes:

$$Para\;\; m=2 \Rightarrow y-1=2(x+2)=2x+4 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 2x-y+5=0}}.$$

$$Para\;\; m=6 \Rightarrow y-1=6(x+2)=6x+12 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv 6x-y+13=0}}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$Para\;\; m=2 \Rightarrow 2=-2x \;;;\; x_1=-1 \Rightarrow y_1=4-(-1)^2=4-1=3 \Rightarrow \underline{\underline{T_1(-1,\; 3)}}.$$

$$Para\;\; m=6 \Rightarrow 6=-2x \;;;\; x_2=-3 \Rightarrow y_2=4-(-3)^2=4-9=-5 \Rightarrow \underline{\underline{T_2(-3,\; -5)}}.$$

La representación gráfica, aproximad, de la situación esta refleja en la figura que se acompaña.

****