PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2010 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + a^3y + z = 1 \\ ax + ay + z = 1 \\ a^3x + ay + z = 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado.

b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado.

c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & a^3 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^3 & a & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} a & a^3 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ a^3 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro real α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^3 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2\left(1+1+a^4-a^2-1-a^2\right) =$$

$$= a^2\left(a^4 - 2a^2 + 1\right) = a^2\left(a^2 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1 = 0} \;\;;;\;\; \underline{a_2 = -1} \;\;;;\;\; \underline{a_3 = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\left\{\begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} Para \;\; \alpha = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ Para \;\; \alpha = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ Para \;\; \alpha = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 1 < n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

(Por ser Rango M = Rango M’ = 1 y tener 3 incógnitas: dos grados de libertad)

c)

Para α = 0 el sistema es $\begin{cases} z = 1 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$, equivalente a $\{z = 1$. La solución es:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \;\; \forall \lambda, \;\; \mu \in R \\ z = 1 \end{cases}}}$$

Para α = 1 el sistema es $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ equivalente a $\{x + y + z = 1$. La solución es:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \qquad , \;\; \forall \lambda, \;\; \mu \in R \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}}}$$

Para α = -1 el sistema es $\begin{cases} -x-y+z=1 \\ -x-y+z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases}$ equivalente a $\{-x-y+z=1$. La solución es:

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1+\lambda+\mu \end{cases} \quad , \ \forall \lambda, \ \mu \in R}}$$

****

2º) Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O(0, 0, 0), A(6, -3, 0) y B(3, 0, 1).

b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P(8, 7, -2) y es perpendicular a π.

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P.

----

a)

Los puntos O(0, 0, 0), A(6, -3, 0) y B(3, 0, 1) determinan los vectores:

$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}=(6,\ -3,\ 0)\ \ y\ \ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{OB}=(3,\ 0,\ 1).$

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -3x+9z-6y=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv x+2y-3z=0}}$$

b)

El plano π tiene como vector normal $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ -3)$.

La recta r que pasa por el punto P(8, 7, -2) y es perpendicular a π tiene como vector director a $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ -3)$. Su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r\equiv\begin{cases} x=8+\lambda \\ y=7+2\lambda\ ,\ \forall\lambda\in R \\ z=-2-3\lambda \end{cases}}}$$

c)

El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P es la intersección del plano con la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv x+2y-3z=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=8+\lambda \\ y=7+2\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow(8+\lambda)+2(7+2\lambda)-3(-2-3\lambda)=0\ ;;\ 8+\lambda+14+4\lambda+6+9\lambda=0\ ;;$$

$14\lambda+28=0\ ;;\ \lambda+2=0\ ;;\ \underline{\lambda=-2}.$

$$Q \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 8 - 2 = 6 \\ y = 7 - 4 = 3 \\ z = -2 + 6 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q(6,\ 3,\ 4)}}.$$

****

3º) Dadas las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

b) Demostrar que $f(x)\geq g(x)$ cuando $x\geq 0$.

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B.

----

a)

Las abscisas de los puntos de intersección de las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$ son las soluciones de la ecuación que se obtiene de su igualación:

$$f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; x^3=2x^2-x \;\;;;\;\; x^3-2x^2+x=0 \;\;;;\;\; x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)^2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \;\rightarrow\; \underline{y_1=0} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{A(0,\;0)}} \\ \\ \underline{x_2=1} \;\rightarrow\; \underline{y_2=1} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{B(1,\;1)}} \end{cases}.$$

b)

Para demostrar que $f(x)\geq g(x)$ cuando $x\geq 0$ vamos a estudiar el signo de la función $h(x)=f(x)-g(x)$ para $x\geq 0$; si es positivo, habremos demostrado lo pedido:

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^3-\left(2x^2-x\right)=x^3-2x^2+x=x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)^2.$$

$$\underline{\underline{h(x)\geq 0,\;\; \forall x\geq 0 \;\Rightarrow\; f(x)\geq g(x),\;\; \forall x\geq 0,\quad c.q.d.}}$$

c)

Teniendo en cuenta los apartados anteriores, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^1 \left[x^3-\left(2x^2-x\right)\right]\cdot dx=\int_0^1 \left(x^3-2x^2+x\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{1^4}{4}-\frac{2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-0=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3-8+6}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{12}\;u^2=S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(x)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de A(x) sea 6.

b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz 2A(x).

c) Demostrar que la matriz B(x) no tiene matriz inversa para ningún valor real de y.

----

a)

Teniendo en cuenta la propiedad de los determinantes que "si una línea se descompone en dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo el resto de las líneas iguales".

Aplicando la propiedad al determinante de la matriz A(x):

$$|A(x)|=6 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 & 3 \\ x & 6 & 2 \\ x & 8 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2x \cdot (6+12+4-9-8-4) + 2 \cdot (12+24+12-27-16-8) = 2x \cdot (22-21) + 2 \cdot (48-51) =$$

$$= 2x \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 2x-6 = 6 \;\;;;\;\; 2x = 12 \;\;;;\;\; \underline{\underline{x=6}}.$$

b)

Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número, y que si se multiplican o dividen los elementos de una línea del determinante de una matriz cuadrada, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número y, por último, que la matriz A(x) es cuadrada de orden tres:

$$|2A(x)| = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (2x-6) \cdot 1 = 16x-48 = 16(x-3).$$

$$\underline{\underline{|2A(x)| = 16(x-3)}}$$

c)

Para demostrar que la matriz B(x) no tiene matriz inversa para ningún valor real de y, tenemos que demostrar que el valor del determinante de B(x) es cero, para cualquier valor real de y.

Teniendo en cuenta propiedades enunciadas en los apartados anteriores:

$$|B(x)| = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & 4 & 3 \\ y & 6 & 2 \\ y & 8 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2y \cdot (3+12+4-9-8-2) + 2 \cdot (3+24+12-27-8-4) = 2y \cdot (19-19) + 2 \cdot (39-39) =$$

$$= 2y \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 .$$

$$\underline{\underline{|B(x)| = 0,\ \ \forall y \in R \ \ \Rightarrow \ B(x) \ \ no \ \ es \ \ inversible, \ \ c.q.d.}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4$ y $s \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s.

b) El ángulo que forman las rectas r y s.

c) Ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ del plano π que contiene a las rectas r y s.

----

a)

En primer lugar expresamos las rectas r y s por ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 2x-8 = 3y-12 \\ y-4 = 2z-8 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{r \equiv \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases}}.$$

$$s \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} 2x = y \\ 3y = 2z \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{s \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}}.$$

El punto de corte el la solución del sistema que forman: $\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ y-2z+4=0 \\ 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$.

Para resolver el sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas despreciamos una de ellas, por ejemplo la primera:

$$\left.\begin{array}{r} y-2z+4=0 \\ 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 2x \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{r} y-2z=-4 \\ 3y-2z=0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} -y+2z=4 \\ 3y-2z=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 2y = 4 \;;;\; \underline{y=2} \;;;$$

$$y-2z=-4 \;;;\; 2-2z=-4 \;;;\; 2z=6 \;;;\; \underline{z=3} \;;;\; y=2x \;;;\; x=\frac{y}{2}=\frac{2}{2}=\underline{1=x}.$$

$$\underline{\underline{P(1,\; 2,\; 3)}}$$

b)

El ángulo que forman las rectas r y s es el que forman sus vectores directores, que son los siguientes:

$$r \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{u} = (3,\; 2,\; 1)}. \qquad s \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{v} = (1,\; 2,\; 3)}.$$

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{(3,\ 2,\ 1) \cdot (1,\ 2,\ 3)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{3+4+3}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{1+4+9}} = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} =$$

$$= \frac{10}{14} = \frac{5}{7} = 0'7143 \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha = 44^{o}\ \ 24'\ \ 55''}$$

<u>El ángulo que forman las rectas r y s es α = 44º 24’ 55’’.</u>

c)

El plano π que contiene a las rectas r y s puede determinarse por los vectores directores de las rectas y un punto cualquiera de una de las rectas, por ejemplo, el origen de coordenadas que pertenece a s:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; 6x + y + 6z - 2z - 2x - 9y = 0 \;\;;;\;\; 4x - 8y + 4z = 0 \;\;;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + z = 0}}$$

****

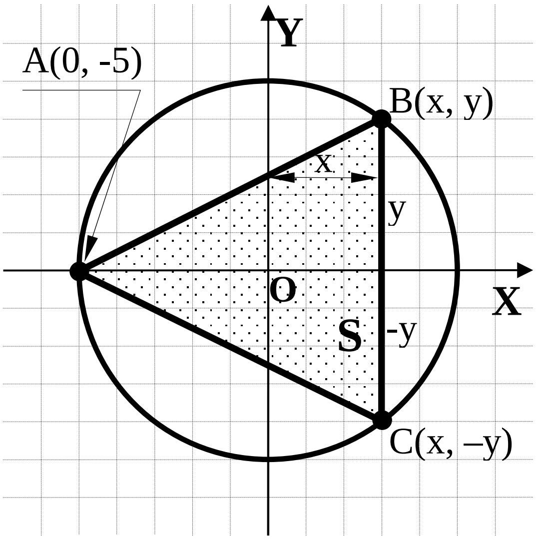
3º) Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro en O(0, 0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto $A(-5,\ 0)$. Los otros dos vértices del triángulo son los puntos B(x, y) y C(x, -y) de la circunferencia. Se pide razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x.

b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo.

c) El valor máximo del área del triángulo.

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



a)

Considerando como base del triángulo el lado $\overline{BC}$, la altura es (x + 5) y el valor de su área es:

$$S = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{(2y)\cdot(x+5)}{2} = \underline{(x+5)\cdot y = S}.$$

Para expresar el valor de y en función de x tenemos en cuenta que:

$$x^2 + y^2 = 5^2 \;\;;;\;\; y^2 = 25 - x^2 \;\;;;\;\; \underline{y = \sqrt{25 - x^2}}.$$

Sustituyendo en el valor de S:

$$\underline{\underline{S = (x+5)\sqrt{25-x^2}\ \ u^2}}$$

b)

El área del triángulo es máxima cuando se anula su primera derivada:

$$S' = 1 \cdot \sqrt{25 - x^2} + (x+5)\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \sqrt{25-x^2} - \frac{x(x+5)}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{25 - x^2 - x^2 - 5x}{\sqrt{25-x^2}} =$$

$$= \underline{\frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25-x^2}} = S'(x)}.$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 5x + 25}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \;;;\; 2x^2 + 5x - 25 = 0 \;;;\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+200}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{4} =$$

$$= \frac{-5 \pm 15}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{10}{4} = \underline{\frac{5}{2} = x_1} \;;;\; x_2 = -\frac{20}{4} = \underline{-5 = x_2}.$$

La solución ex $x = \frac{5}{2}$ ya que la solución $x = -5$ carece de sentido lógico.

$$y = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{2} = y = x}.$$

Las coordenadas de B y C para que el triángulo tenga máxima área son:

$$\underline{\underline{B\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)}}\ y\ \underline{\underline{C\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)}}.$$

c)

El valor máximo del área del triángulo es la que se obtiene en la fórmula obtenida para los valores de x, e y obtenidos:

$$S = \left(\frac{5}{2} + 5\right) \cdot \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{75\sqrt{3}}{4}\,u^2 \cong 32'48\,u^2 = S}}$$

****