PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2012

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} 2x+a^2z=5 \\ x+(1-a)y+z=1 \\ x+2y+a^2z=1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente:

a) La solución del sistema S cuando α = 0.

b) Todas las soluciones del sistema S cuando α = -1.

c) El valor de α para que el sistema S es incompatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a^2 & 5 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^2(1-a)+2a^2-a^2(1-a)-4=a^2(1-a)+2a^2-4=a^2-a^3+2a^2-4=$$

$=-a^3+3a^2-4=0$;; $a^3-3a^2+4=0$. Resolviendo por Ruffini:

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	$\boxed{0}$
2		2	-4	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

Las raíces diferentes son $\underline{\alpha = -1}$ y $\underline{\alpha = 2}$.

a)

Para α = 0 el sistema resulta $S:\begin{cases} 2x=5 \\ x+y+z=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado y cuya solución es la siguiente:

$$\underline{\underline{x=\frac{5}{2}}} \;;;\; y=\frac{1-x}{2}=\frac{1-\frac{5}{2}}{2}=\frac{-\frac{3}{2}}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{4}=y}} \;;;\; z=1-x-y=1-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4-10+3}{4}=\underline{\underline{-\frac{3}{4}=z}}.$$

b)

Para α = -1 es $M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2 por tener las dos últimas filas iguales.

$$\underline{\underline{Para\;\; a=-1 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M'=2 < n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Indeterminado}}$$

El sistema resulta $S:\begin{cases} 2x+z=5 \\ x+2y+z=1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$, equivalente a $S:\begin{cases} 2x+z=5 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$. Haciendo

$\underline{y=\lambda}$: $\left.\begin{matrix} 2x+z=5 \\ x+z=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x+z=5 \\ -x-z=-1+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=4+2\lambda}$;; $z=5-2x=5-8-4\lambda=\underline{-3-4\lambda=z}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3-4\lambda \end{cases}, \;\; \forall \lambda \in R}}$$

c)

Por el desarrolla del ejercicio en los apartados anteriores, necesariamente el sistema será incompatible para α = 2, cosa que comprobamos a continuación.

Para α = 2 el es $M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango vamos a determinar:

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+10+5-4=9 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2 \Rightarrow Rango\ \ M\ =2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

El sistema es incompatible para α = 2, como esperábamos.

****

2º) Se dan las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = a \\ z = 2 - a \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de corte de r_1 y r_2.

b) La ecuación del plano π que contiene esas dos rectas.

c) La distancia del punto A(0, 0, 1) a la recta r_2.

----

a)

Para hallar el punto P de corte de r_1 y r_2 basta con igualar, respectivamente, los valores de sus variables:

$$\left.\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ a = 1 + \beta \\ 2 - a = -1 - 2\beta \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha = -1} \;;\; \underline{\beta = -2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P(-1,\ -1,\ 3)}}.$$

b)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ -2)$, respectivamente.

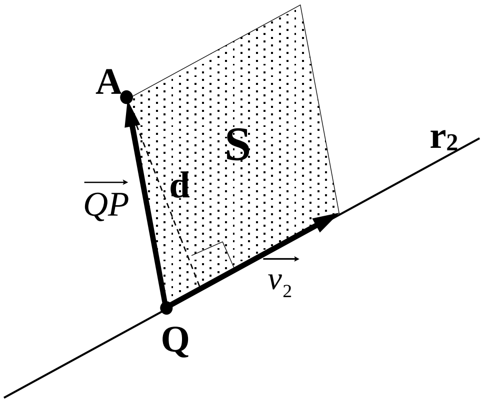
La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;\; -2(x+1) + 2(z-3) + (x+1) + 4(y+1) = 0 \;;$$

$$-(x+1) + 4(y+1) + 2(z-3) = 0 \;;\; -x - 1 + 4y + 4 + 2z - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\pi \equiv x - 4y - 2z + 3 = 0}}.$$

c)

La distancia d del punto A(0, 0, 1) a la recta r_2 puede determinarse teniendo en cuenta que Q(-1, 1, -1) es un punto de r_2 y el vector director de r_2 es $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ -2)$.



Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación, que es el que aparece en la figura.

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v_2}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{QA}\right|$, se deduce que la distancia es: $d=\frac{\left|\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{QA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}$.

El vector $\overrightarrow{QA}$ es: $\overrightarrow{QA}=A-Q=(0,\ 0,\ 1)-(-1,\ 1,\ -1)=(1,\ -1,\ 2)$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$d(A,\ r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{QA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{|2i-2j-k-2i|}{\sqrt{0+1+4}}=\frac{|-2j-k|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}{\sqrt{5}}=1.$$

$$\underline{\underline{d(A,\ r_2)=1\ unidad}}$$

****

3º) Con el símbolo Lx se representa el logaritmo de un número positivo x cuando la base del logaritmo es el número e. Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad $f(x)=4xLx$. Obtener razonadamente:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo.

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=4xLx$ en el punto A(1, 0).

c) El área limitada entre las rectas y = 0, x = e y x = e^2 y la curva $y=4xLx$.

----

a)

Una función f alcanza el mínimo relativo en un punto cuando se anula su derivada y, para los valores que la anulan, resulta positiva su segunda derivada.

$$f'(x)=4\cdot Lx+4x\cdot\frac{1}{x}=4Lx+4=4(Lx+1)=0\ \Rightarrow\ Lx+1=0\ ;;\ Lx=-1\ \Rightarrow\ \underline{x=e^{-1}}.$$

$$f''(x)=4\cdot\frac{1}{x}=\frac{4}{x}\ \Rightarrow\ f''\left(e^{-1}\right)=\frac{4}{e^{-1}}=4e>0\ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ }x=e^{-1}}.$$

$$f\left(e^{-1}\right)=4\cdot e^{-1}\cdot Le^{-1}=\frac{4}{e}\cdot(-1)=-\frac{4}{e}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Mínimo\ \ relativo}:\ P\left(\frac{1}{e},\ -\frac{4}{e}\right)}}.$$

b)

La pendiente de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$m=f'(1)=4\cdot(L1+1)=4\cdot(1+0)=\underline{4=m}.$$

La fórmula de la ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m\cdot(Lx+1)$.

Aplicando la fórmula al punto A(1, 0) y m = 4:

$$y-0=4\cdot(x-1)=4x-4\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Tangente}:\ y=4x-4}}.$$

c)

Para valores de x tales que $e\le x\le e^2$, todas las ordenadas de la curva $y=4xLx$ son positivas, por lo cual el área limitada entre las rectas y = 0, x = e y x = e^2 y la curva $y=4xLx$ es la siguiente:

$$S=4\int_e^{e^2}xLx\cdot dx\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix}Lx=u\rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx\\ x\cdot dx=dv\rightarrow\frac{x^2}{2}=v\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=4\cdot\left[Lx\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_e^{e^2}=$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx \right]_e^{e^2} = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_e^{e^2} = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{4} \left(2L\,x - 1 \right) \right]_e^{e^2} = \left[x^2 \left(2L\,x - 1 \right) \right]_e^{e^2} =$$

$$= \left[\left(e^2 \right)^2 \left(2L\,e^2 - 1 \right) \right] - \left[e^2 \left(2L\,e - 1 \right) \right] = e^4 \left(4L\,e - 1 \right) - e^2 \left(2 - 1 \right) = e^4 \left(4 - 1 \right) - e^2 = 3e^4 - e^2 = \underline{\underline{e^2 \left(3e^2 - 1 \right) u^2 = S}}\,.$$

****

OPCIÓN B

1º) Obtener razonadamente:

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$.

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y verifica la ecuación: $A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el determinante de A es positivo.

----

a)

El rango de la matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango \ M = 2}.$$

La matriz de coeficientes es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su rango es el siguiente:

$$Rango \ M' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 + 3 = 3 - 3 = 0 \\ \\ \{C_1, \ C_3, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 6 - 3 - 3 + 2 = 9 - 9 = 0 \\ \\ \{C_2, \ C_3, \ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 + 2 = 6 - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Rango \ M' = 2}.$$

$$\underline{\underline{Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

El sistema resulta $S: \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$. Despreciando la segunda ecuación y haciendo $\underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = 1 - 2\lambda}$;; $y = x + z + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda + 1 = \underline{2 - \lambda = y}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda\ , \quad \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices:

$$B^2 = B\ ;;\ B \cdot B = B \Rightarrow |B \cdot B| = |B|\ ;;\ |B| \cdot |B| = |B| \Rightarrow \underline{\underline{|B| = 1}}.$$

c)

$$A^2 - 9 \cdot I = O\ ;;\ A^2 = 9I\ ;;\ A \cdot A = 9I\ ;;\ |A \cdot A| = |9I|.$$

$$|A| \cdot |A| = 9^4\ ;;\ (|A|)^2 = 9^4 \Rightarrow \underline{\underline{|A| = 9^2 = 81}}.$$

****

2º) Se da la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+nz=p$, donde n y p son dos parámetros reales. Obtener razonadamente:

a) Todos los valores de n para que la intersección de la recta r y el plano π es un punto.

b) El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π.

c) El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π.

----

a)

Para que la recta r y el plano π se corten en un punto es condición necesaria que el vector director de la recta no sea perpendicular al vector normal del plano.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(1,\ -2,\ -2)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 5,\ -1)$.

$$\overrightarrow{v_r}'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=2i-2j+5k+2k+10i+j=12i-j+7k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(12,\ -1,\ 7)}.$$

El vector normal del plano $\pi \equiv 2x+y+nz=p$ es $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ n)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}=(12,\ -1,\ 7)$ y $\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ n)$ son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n}=(12,\ -1,\ 7)\cdot(2,\ 1,\ n)=24-1+7n=23+7n=0\ ;;\ \underline{n=-\frac{23}{7}}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ secantes\ \ \forall n,p\in R,\ n\neq -\frac{23}{7}}}$$

b)

Existen diversas formas de hacer este apartado; una de ellas es la siguiente: la recta r está contenida en el plano π cuando todos los puntos de r están contenidos en π, para lo cual es suficiente con que lo estén dos de ellos.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda}\ ;;\ \left.\begin{array}{r} x-2y=1+2\lambda \\ x+5y=\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -x+2y=-1-2\lambda \\ x+5y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 7y=-1-\lambda\ ;;$$

$$\underline{y=-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\lambda}\ ;;\ x=\lambda-5y=\lambda+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\lambda=\underline{\frac{5}{7}+\frac{12}{7}\lambda=x}\ \Rightarrow\ \underline{r\equiv\begin{cases}x=\frac{5}{7}+\frac{12}{7}\lambda\\ y=-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\lambda\\ z=\lambda\end{cases}}.$$

Dos puntos de r son, por ejemplo, A(-1, 0, -1) y B(11, -1, 6) para λ = -1 y λ = 6, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x+y+nz=p\\ A(-1,\ 0,\ -1)\end{array}\right\}\Rightarrow -2+0-n=p\ ;;\ n+p=-2\\ \\ \left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x+y+nz=p\\ B(11,\ -1,\ 6)\end{array}\right\}\Rightarrow 22-1+6n=p\ ;;\ 6n-p=-21\end{array}\right\}\Rightarrow 7n=-23\Rightarrow\begin{cases}\underline{n=-\frac{23}{7}}\\ \\ p=-2-n=\underline{\frac{9}{7}=p}\end{cases}.$$

$$\underline{\underline{\textit{La recta r está contenida en el plano } \pi \textit{ para } n=-\frac{23}{7}\ \textit{y}\ p=\frac{9}{7}}}$$

c)

La recta r no corta al plano π cuando son paralelos y la recta no está contenida en el plano. De los apartados anteriores se deduce que:

$$\underline{\underline{\textit{La recta r no corta al plano } \pi \textit{ para } n=-\frac{23}{7}\ \textit{y}\ p\neq\frac{9}{7}}}$$

****

3º) Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A(0,\ 12)$, $B(-x,\ x^2)$ y $C(x,\ x^2)$, siendo $x^2<12$. Obtener razonadamente:

a) El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C.

b) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima.

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta y = 4 y el arco de parábola $y=x^2$, cuando $-2\leq x\leq 2$.

Obtener razonadamente:

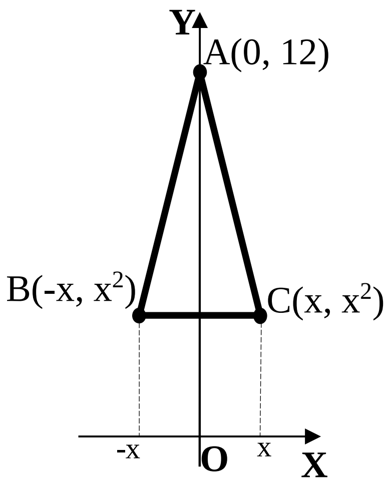
c) El área de la superficie S.

d) El área total del escudo.

----

a)

$$S=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{PA}}{2}=\frac{[x-(-x)]\cdot(12-x^2)}{2}=\frac{2x\cdot(12-x^2)}{2}=12x-x^3.$$



$$\underline{\underline{S=12x-x^3}}$$

b)

El área del triángulo será máxima cuando se anule su derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'=12-3x^2=3(4-x^2)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-2}\ ;;\ \underline{x_2=2}.$$

$$S''=-6x\ \Rightarrow\ \begin{cases} S''(-2)=-6\cdot(-2)=12>0\ \rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-2} \\ \\ S''(2)=-6\cdot 2=-12<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=2} \end{cases}.$$

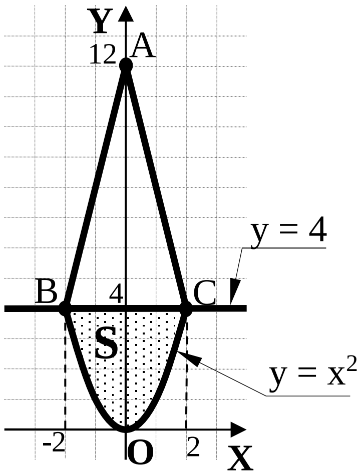
Las coordenadas pedidas son: $\underline{\underline{B(-2,\ 4)}}$ y $\underline{\underline{C(2,\ 4)}}$.

c)

Los puntos de corte de la parábola $y=x^2$ con la recta y = 4 son las soluciones que resultan de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x^2=4\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=-2\ \rightarrow\ \underline{B(-2,\ 4)} \\ \\ x_2=2\ \rightarrow\ \underline{C(2,\ 4)} \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que la gráfica de $y = x^2$ pasa por el origen, la representación gráfica de la situación es la que se encuentra en la figura adjunta.



El área de la superficie S se deduce de la observación de la figura, y es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} 4 \cdot dx - \int_{-2}^{2} x^2 \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) \cdot dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\, u^2 = S}}\,.$$

d)

Teniendo en cuenta que el área del triángulo es $S_{ABC} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16\, u^2$, el área total del escudo es la siguiente:

$$S_{TOTAL} = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48 + 32}{3} = \underline{\underline{\frac{80}{3}\, u^2 = S_{TOTAL}}}$$

****