PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2013

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Comprobar razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir $A \cdot B = B \cdot A$, entonces se deduce que $A^2 \cdot B^2 = (A \cdot B)^2$.

b) Que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3A + 2I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices 3x3 unidad y nula, y que una matriz A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ tiene matriz inversa

c) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores α y β tales que $A^3 = \alpha \cdot A + \beta \cdot I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 - 3A + 2I = O$.

----

a)

Si el producto de las matrices cuadradas A y B es conmutativo se cumple que:

$(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = A \cdot B \cdot A \cdot B = \underline{A^2 \cdot B^2}$, como queríamos comprobar.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0-0-0 & 0+0+0 \\ 0-0+0 & 0+16-30 & 0-40+70 \\ 0-0+0 & 0+12-21 & 0-30+49 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}}.$$

$$A^2-3A+2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&12&-30\\0&9&-21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{A^2-3A+2I=O}}.$$

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{vmatrix}=-28+30=2\neq 0 \Rightarrow$$ <u>A es inversible, como se quería demostrar.</u>

c)

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-14&30\\0&-9&19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0&0-0-0&0+0+0\\0-0+0&0+56-90&0-140+210\\0-0+0&0+36-57&0-90+133\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-34&70\\0&-21&43\end{pmatrix}=A^3}.$$

$$\alpha\cdot A+\beta\cdot I=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&10\\0&-3&7\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&-4\alpha&10\alpha\\0&-3\alpha&7\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\beta\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0&0\\0&-4\alpha+\beta&10\alpha\\0&-3\alpha&7\alpha+\beta\end{pmatrix}=\alpha\cdot A+\beta\cdot I}.$$

$$A^3=\alpha\cdot A+\beta\cdot I\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-34&70\\0&-21&43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0&0\\0&-4\alpha+\beta&10\alpha\\0&-3\alpha&7\alpha+\beta\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=1\\-4\alpha+\beta=-34\\10\alpha=70\\-3a=-21\\7\alpha+\beta=43\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha=7}}\ ;;\ \underline{\underline{\beta=-6}}.$$

****

2º) Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - a \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1.

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, y la ecuación de ese plano π.

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo P(-1, 0, 1), Q(0, 1, 2) y R el punto de intersección de r_1 y r_2.

----

a)

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - a \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \;;;\; r \equiv \begin{cases} x - 1 = 2y \\ -x + 1 = 2z - 4 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + 2z - 5 = 0 \end{cases}}}.$$

b)

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son:

$$r_1 \Rightarrow \begin{cases} A_1(1,\ 0,\ 2) \\ \overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ -1) \end{cases} \text{ y } r_2 \Rightarrow \begin{cases} A_2(-1,\ 1,\ -1) \\ \overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ -2) \end{cases}.$$

Es evidente que los vectores directores de las rectas son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes: $\frac{2}{0} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-2}$.

Para comprobar que las rectas se cortan consideramos el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A_1A_2}$, siendo A_1 un punto de r_1 y A_2 un punto de r_2: $\overrightarrow{w} = A_2 - A_1 = (-1,\ 1,\ -1) - (1,\ 0,\ 2) = (-2,\ 1,\ -3)$.

Para que r_1 y r_2 se corten, el rango de los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\}$ tiene que ser dos, o sea que tiene que anularse el determinante de la matriz que determinan:

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 2 + 4 = 0.$$

<u>Las rectas r_1 y r_2 se cortan; están contenidas en un mismo plano.</u>

La expresión general del plano π que contiene a las rectas r_1 y r_2 la determinan dos de los vectores hallados y uno de los puntos de una de las rectas; por ejemplo los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 1,\ -2)$ y el punto $A_1(1, 0, 2)$:

$$\pi\left(A_1;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x-1)+2(z-2)+(x-1)+4y=0\ ;;$$

$$-(x-1)+2(z-2)+4y=0\ ;;\ -x+1+2z-4+4y=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi\equiv x-4y-2z+3=0}}.$$

c)

El punto R intersección de las rectas r_1 y r_2 es la solución del sistema que forman:

$$r_1\equiv\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2-a \end{cases}\ ;;\ r_2\equiv\begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} \alpha=-1 \\ \beta=-2 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{R(-1,\ -1,\ 3)}.$$

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0,\ 1,\ 2)-(-1,\ 0,\ 1)=(1,\ 1,\ 1).$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PR}=R-P=(-1,\ -1,\ 3)-(-1,\ 0,\ 1)=(0,\ -1,\ 2).$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{PQ}\ y\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{PR}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)=\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\,|\,2i-k+i-2j\,|=\frac{1}{2}\,|\,3i-2j-k\,|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+1}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2}}=S_{PQR}\ .$$

****

3º) Se dan las funciones $f(x)=\frac{1}{2}L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x)=L\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener <u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Las derivadas de f(x) y g(x).

b) Los dominios de definición de las funciones f(x) y g(x).

c) La expresión simplificada de la función f(x) + g(x), y el recorrido de esta función f(x) + g(x).

----

a)

$$f(x)=\frac{1}{2}L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1+x)-L(1-x)\right].$$

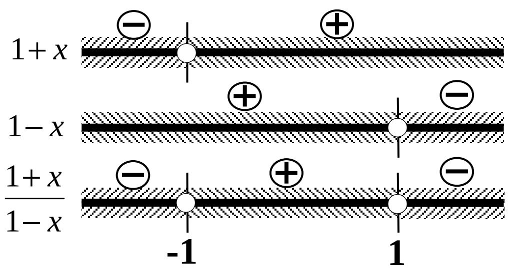
$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2}=\underline{\underline{\frac{1}{1-x^2}}}.$$

$$g(x)=L\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\cdot L\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1-x)-L(1+x)\right].$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1+x}-\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-x^2}=\underline{\underline{\frac{-1}{1-x^2}}}.$$

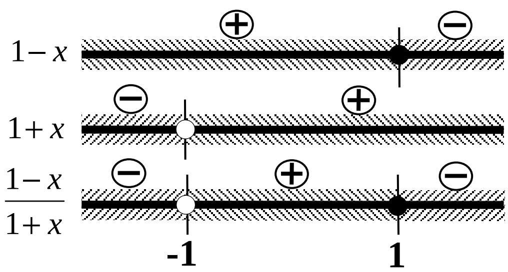
b)

El dominio de definición de f(x) es el conjunto de valores reales de x que hacen mayor que cero el cociente $\frac{1+x}{1-x}$, o sea:



$\Rightarrow\ \underline{\underline{D(f)\Rightarrow(-1,\ 1)}}.$

El dominio de definición de g(x) es el conjunto de valores reales de x que hacen igual o mayor que cero el cociente $\frac{1-x}{1+x}$, o sea:



$\Rightarrow\ \underline{\underline{D(g)\Rightarrow(-1,\ 1]}}.$

c)

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1+x)-L(1-x)\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[L(1-x)-L(1+x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[L(1+x)-L(1-x)+L(1-x)-L(1+x)\right]=\frac{1}{2}\cdot 0=\underline{\underline{0=f(x)+g(x)}}.$$

$$\underline{\underline{R\left[f(x)+g(x)\right]\Rightarrow\{0\}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ 3x+5y+z=1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Todas las soluciones del sistema cuando α = 7

b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado.

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible determinado.

----

a)

Para α = 7 el sistema resulta $\begin{cases} 7x+y+z=1 \\ x+7y+z=1 \\ 3x+5y+z=1 \end{cases}$ y sus matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyos rangos son iguales por ser iguales las dos últimas columnas de la matriz ampliada.

$$|M|=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=49+5+3-21-35-1=57-57=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=2}.$$

Por ser Rango M = Rango M' = 3 < nº incóg. el sistema es compatible indeterminado.

Despreciando una de las ecuaciones (por ejemplo, la tercera) y haciendo $x=\lambda$:

$$\begin{cases} 7x+y+z=1 \\ x+7y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+z=1-7\lambda \\ 7y+z=1-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -y-z=-1+7\lambda \\ 7y+z=1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=6\lambda\ ;;\ \underline{y=\lambda}\ ;;$$

$z=1-7\lambda-\lambda$;; $\underline{z=1-8\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-8\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}$$

b)

El sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada (que siempre son iguales) sea menor que el número de incógnitas, o sea, cuando el determinante de la matriz de coeficientes sea cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5 + 3 - 3\alpha - 5\alpha - 1 = \alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \;;;\; \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm 6}{2} = 4 \pm 3 \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 1} \;;;\; \underline{\alpha_2 = 7}.$$

El sistema es compatible indeterminado para α = 1 y para α = 7.

c)

Como se indica en el apartado a) los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales.

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado$$

****

2º) Se dan las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \{x-1=y-2=z$. Obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas.

b) La distancia entre las rectas r y s, justificando que las rectas r y s se cruzan.

c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $P\left(\frac{41}{57},\ -\frac{14}{57},\ 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} -y+z=-\lambda \\ y+z=1-2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z=1-3\lambda \;;;\; \underline{z=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}\lambda} \;;;\; -y+z=-\lambda \;;;$$

$$y=z+\lambda=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}\lambda+\lambda=\underline{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\lambda=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector de r son A(1, 0, -1) y $\overrightarrow{v_r}=(2,\ -1,\ -3)$.

Un punto y un vector de s son B(1, 2, 0) y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 1)$.

b)

Por ser los vectores $\overrightarrow{v_r}=(2,\ -1,\ -3)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 1)$ linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, las rectas r y s se cruzan o se cortan.

Para saber si se cortan o se cruzan consideramos el vector $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}$, siendo A un punto de r y B un punto de s: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=(0,\ 2,\ 1)$.

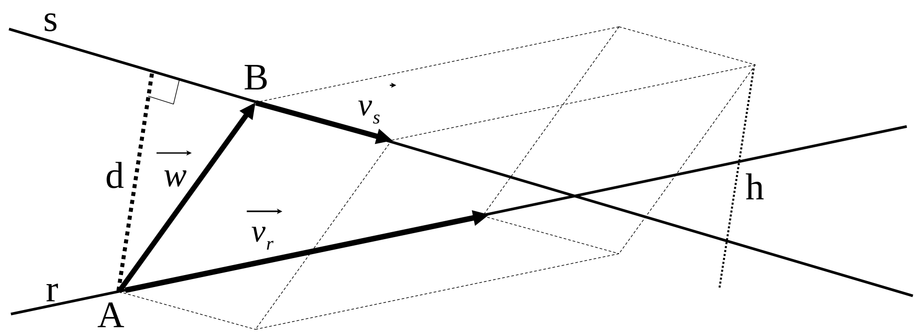
Según sea dos o tres el rango de los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}$ las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-6-4+1=-7 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}=3}.$$

<u>Las rectas r y s se cruzan.</u>

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura, siendo $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (0,\ 2,\ 1)$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v_r} \cdot \left(\vec{v_s} \wedge \vec{w}\right) = \left|\vec{v_r} \wedge \vec{v_s}\right| \cdot h = \left|\vec{v_r} \wedge \vec{v_s}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{v_r} \cdot \left(\vec{v_s} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v_r} \wedge \vec{v_s}\right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\vec{v_r} \cdot \left(\vec{v_s} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v_r} \wedge \vec{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|} = \frac{|2-6-4+1|}{|-i-3j+2k+k+3i-2j|} = \frac{|-7|}{|2i-5j+3k|} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{4+25+9}} = \frac{7}{\sqrt{38}} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{38}}{38}\ u = d(r,\ s)}}.$$

c)

Un vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{v_r} = (2,\ -1,\ -3)$ y $\vec{v_s} = (1,\ 1,\ 1)$:

$$\vec{v_t} = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = 2i - 5j + 3k = (2,\ -5,\ 3).$$

La expresión de la recta t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \frac{x - \frac{41}{57}}{2} = \frac{y + \frac{14}{57}}{-5} = \frac{z}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t \equiv \frac{57x - 41}{2} = \frac{57y + 14}{-5} = \frac{57z}{3}}}\,.$$

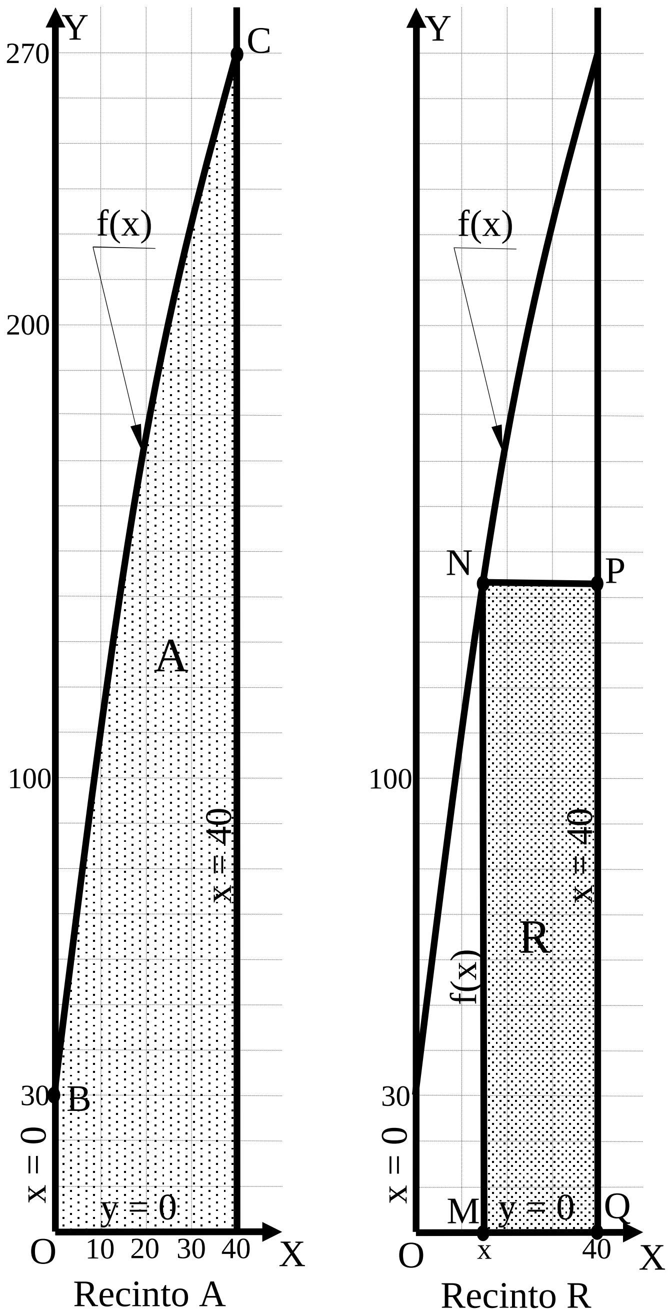
****

3º) En el plano XY está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones x = 0 y x = 40, respectivamente, una carretera de ecuación y = 0, y el tramo del curso de un río de ecuación $y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, con $0 \le x \le 40$, siendo positivo el signo de la raíz cuadrada. Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A, de manera que los vértices de R sean los puntos M(x, 0), N[x, f(x)], P[40, f(x)] y Q(40, 0). Obtener <u>razonadamente</u>, <u>escribiendo los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) El área de la parcela A.

b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde el área máxima.

c) El valor de dicha área.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.

a)

Los puntos son los respectivos valores de f(0) y f(40).

$$A=\int_0^{40} f(x)\cdot dx=\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c|c} 2x+1=t & x=40\rightarrow t=81 \\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt & x=0\rightarrow t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=30\int_1^{81}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dx=$$

$$=30\cdot\frac{1}{2}\int_1^{81} t^{\frac{1}{2}}\cdot dx=15\cdot\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{81}=\frac{15\cdot 2}{3}\cdot\left[t\sqrt{t}\right]_1^{81}=10\cdot\left(81\cdot\sqrt{81}-1\cdot\sqrt{1}\right)=10\cdot(81\cdot 9-1)=10\cdot(729-1)=$$

$$=10\cdot 728=\underline{\underline{7.280\ u^2=A}}.$$

b)

El área del recinto R es $R=(40-x)\cdot f(x)=30(40-x)\sqrt{2x+1}$.

Para que el área sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$R'(x)=30\left[-\sqrt{2x+1}+(40-x)\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right]=30\left[\frac{40-x}{\sqrt{2x+1}}-\sqrt{2x+1}\right]=0\Rightarrow\frac{40-x}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}\ ;;$$

$$40-x=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\ ;;\ 40-x=2x+1\ ;;\ 39=3x\ ;;\ \underline{x=13}.$$

$$f(13)=30\sqrt{2\cdot 13+1}=30\sqrt{27}=\underline{90\sqrt{3}}.$$

Los vértices del rectángulo R son:

$$\underline{\underline{M(13,\ 0),\ N\left(13,\ 90\sqrt{3}\right),\ P\left(40,\ 90\sqrt{3}\right)\ y\ Q(40,\ 0)}}$$

c)

El valor del área del recinto R es la siguiente:

$$R=30(40-13)\sqrt{27}=30\cdot 27\cdot 3\sqrt{3}=\underline{\underline{2.430\sqrt{3}\ u^2\cong 4.208'88\ u^2}}.$$

****