PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2013

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, donde α, b y c son tres números reales. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La relación que deben verificar los números α, b y c para que el sistema sea compatible.

b) La solución del sistema cuando α = -1, b = 2 y c = 3.

c) La solución del sistema cuando los números α, b y c verifiquen que α = c = -2b.

----

a)

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango que, además, tiene que coincidir con el número de incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$.

Según lo expuesto anteriormente, para que el sistema sea compatible es necesario que el determinante de la matriz ampliada sea cero, puesto que el determinante de la matriz de coeficientes tiene de rango dos.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \;;\; -8c - a + 10b + 8a - 2b + 5c = 0 \;\Rightarrow\; \underline{7a + 8b - 3c = 0}.$$

Para que el sistema sea compatible determinado tiene que ser 7α + 8b - 3c = 0.

b)

Para α = -1, b = 2 y c = 3 es: $7 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -7 + 16 - 9 = 0$. Para α = -1, b = 2 y c = 3 el sistema es compatible determinado.

Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y resolviendo es sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ -x - 4y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ -2x - 8y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -3y = 3 \;;\; \underline{\underline{y = -1}} \;;\; 2x + 5y = -1 \;;\; 2x - 5 = -1 \;;\; \underline{\underline{x = 2}}.$$

c)

Sabiendo que α = c = -2b, expresando la condición de compatibilidad encontrada 7α + 8b - 3c = 0 en función de b:

$$7 \cdot (-2b) + 8b - 3 \cdot (-2b) = 0 \;;\; -14b + 8b + 6b = 0 \;;\; -14b + 14b = 0.$$

Para α = c = -2b el sistema es compatible determinado.

Las soluciones, por ejemplo en función de b, son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = -2b \\ -x - 4y = b \end{array}\right\}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2b & 5 \\ b & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{8b - 5b}{-8 + 5} = \frac{3b}{-3} = \underline{\underline{-b = x}}. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2b \\ -1 & b \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2b - 2b}{-3} = \frac{0}{-3} = \underline{\underline{0 = y}}.$$

****

2º) Sean O(0, 0, 0), A(1, 0, 1), B(2, 1, 0) y C(0, 2, 3). Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El área del triángulo de vértices O, A y B, y el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C.

b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB.

c) La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB, siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C.

----

a)

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(1,\ 0,\ 1)-(0,\ 0,\ 0)=\underline{(1,\ 0,\ 1)}\ \ ;;\ \ \overrightarrow{OB}=B-O=(2,\ 1,\ 0)-(0,\ 0,\ 0)=\underline{(2,\ 1,\ 0)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{OA}\ y\ \overrightarrow{OB}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|2j+k-i|=\frac{1}{2}\cdot|-i+2j+k|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+4+1}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2=S_{OAB}}}.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{OB}=(2,\ 1,\ 0)\ \ y\ \ \overrightarrow{OC}=C-O=(0,\ 2,\ 3).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right]\right|=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot|3+4|=\underline{\underline{\frac{7}{6}\ u^3=V_{OABC}}}.$$

b)

El plano que determinan los puntos O, A y B es:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2y+z-x=0\ ;;\ \underline{\pi\equiv x-2y-z=0}.$$

La distancia de un punto a un plano es: $d(P;\ \pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto C(0, 2, 3) y al plano $\pi \equiv x-2y-z=0$:

$$d(C;\ \pi)=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 2-1\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|-4-3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|-7|}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{6}}{6}\ unidades}}.$$

c)

El punto medio del segmento de extremos O(0, 0, 0) y C(0, 2, 3) es el que tiene como componentes la media aritmética de las componentes: $C'\left(0,\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$.

Aplicando la fórmula al punto $C'\left(0,\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$ y al plano $\pi \equiv x-2y-z=0$:

$$d(C';\ \pi)=\frac{\left|1\cdot 0-2\cdot 1-1\cdot \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-2-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{\left|-\frac{7}{2}\right|}{\sqrt{6}}=\underline{\underline{\frac{7\sqrt{6}}{12}\ unidades}}.$$

****

3º) Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4'5 \leq x \leq 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto O(0, 0). Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria de abscisa x.

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol.

c) Distancia mínima del meteorito al Sol.

Nota: En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

----

a)

Los puntos genéricos de la trayectoria son de la forma $P\left(x,\ \sqrt{2x+9}\right)$.

La distancia $\overline{OP}$ pedida es la siguiente:

$$d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{x^2 + 2x + 9}\ \ unidades}}.$$

b)

La distancia mínima al Sol se producirá cuando la derivada de la distancia sea 0.

$$d' = \overline{OP}' = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}} = 0 \Rightarrow x+1=0\ ;;\ \underline{x=-1}.$$

El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol es $\underline{\underline{P\left(-1,\ \pm\sqrt{7}\right)}}$.

c)

La distancia mínima del meteorito al Sol es la siguiente:

$$d(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 2 + 9} = \sqrt{1-2+9} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ \ unidades}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, obtener razonadamente el valor de los determinantes siguientes, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$.   b) $\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$.   c) $\left|2A\cdot B\cdot A^{-1}\right|$ y $\left|A^{3}\cdot B^{-1}\right|$.

----

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4+20=\underline{\underline{24}}.$$

La inversa de $(A+B)^{-1}$ se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$(A+B/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_4\to F_4-4F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -20 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_4\to -\tfrac{1}{24}F_4\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} F_1\to F_1-5F_3 \\ F_2\to F_2-2F_3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{12} & \frac{1}{6} & \frac{5}{24} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}=\underline{\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ 20 & -8 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right|$. Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número, la expresión anterior se continua como sigue:

$$\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \frac{1}{48^3}\cdot\begin{vmatrix}-10 & 4 & 5\\ 20 & -8 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{vmatrix} = \frac{2\cdot 4}{48^3}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 1 & 5\\ 10 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6\cdot 48^2}\cdot(-10+50+2+10+10+10) = \frac{1}{6\cdot 48^2}\cdot(50+2+10+10) = \frac{72}{6\cdot 48^2} = \frac{12}{48\cdot 48} = \frac{1}{4\cdot 48} = \frac{1}{192}.$$

$$\underline{\underline{\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right| = \frac{1}{192}}}$$

b)

$$\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| = \left|\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 4 & 5\\ 20 & -8 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{24^3}\cdot\begin{vmatrix}20+4+20 & -0+4+10 & -0+0-10\\ -40-8+8 & 0-8+4 & 0-0-4\\ -4+4-4 & 0+4-2 & 0+0+2\end{vmatrix} = \frac{1}{24^3}\cdot\begin{vmatrix}44 & 14 & -10\\ -40 & -4 & -4\\ -4 & 2 & 2\end{vmatrix} = -\frac{4\cdot 2\cdot 2}{24^3}\cdot\begin{vmatrix}11 & 7 & -5\\ 10 & 2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{16}{24\cdot 24^2}\cdot(22-50-14-10-22-70) = -\frac{2}{3\cdot 24^2}\cdot(22-166) = \frac{2\cdot 144}{3\cdot 24^2} = \frac{2\cdot 12\cdot 12}{3\cdot 24\cdot 24} = \frac{2}{12} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

$$\underline{\underline{\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| = \frac{1}{6}}}$$

También puede resolverse este ejercicio de la forma siguiente:

$$\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| = \left|(A+B)^{-1}\right|\cdot|A| = 8\cdot\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{vmatrix} = 8\cdot\frac{1}{192}\cdot(4) = \frac{32}{192} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

$$\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right| = \left|\frac{1}{A}\cdot(A+B)\right| = \frac{|A+B|}{|A|} = \frac{24}{4} = \underline{6} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right| = 6}}.$$

c)

$$\left|2A\cdot B\cdot A^{-1}\right| = 8\cdot|A|\cdot|B|\cdot\frac{1}{|A|} = 8\cdot(-4) = \underline{-32} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\left|2A\cdot B\cdot A^{-1}\right| = -32}}.$$

$$\left|A^3\cdot B^{-1}\right| = |A|^3\cdot\frac{1}{|B|} = \frac{4^3}{-4} = -16 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\left|A^3\cdot B^{-1}\right| = -16}}.$$

****

2º) Dados los puntos A(1, 0, 1), B(2, -1, 0), C(0, 1, 1) y P(0, -3, 2), se pide calcular razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del punto P al punto A.

b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B.

c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C.

----

a)

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que determinan.

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ 0,\ 1) - (0,\ -3,\ 2) = \underline{(1,\ 3,\ -1)}.$$

$$\overline{AP} = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \underline{\underline{\sqrt{11}\ unidades}}.$$

b)

La distancia de P a la recta r viene dada por la fórmula $d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo A un punto cualquiera de r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -1,\ 0) - (1,\ 0,\ 1) = (1,\ -1,\ -1) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ -1)}$.

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3i - j - k - 3k - i + j|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-4i - 4k|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4 \cdot |-i-k|}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{1+1}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{4 \cdot \sqrt{6}}{3}\ unidades = d(P,\ r)}}.$$

c)

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 1) = (-1,\ 1,\ 0).$$

La ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y C es:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ y + (z-1) - (z-1) + (x-1) = 0\ ;;$$

$y+x-1=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x+y-1=0}$.

La distancia de un punto a un plano es: $d(P,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto P(0, -3, 2) y al plano $\pi \equiv x+y-1=0$:

$$d(P,\ \pi)=\frac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{2\sqrt{2}\ unidades}}.$$

****

3º) Dada la función f definida por $f(x) = sen\ x$, para cualquier valor real de x, se pide obtener razonadamente, escribiendo los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{6}$.

b) La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en ese punto P.

c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b).

----

a)

La pendiente a una curva en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow m = f'\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} = m}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\frac{\pi}{6} = sen\ 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)}$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al caso que nos ocupa, es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\,x}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\ ;;\ 12y - 6 = 6\sqrt{3}\,x - \pi\sqrt{3}.$$

Recta tangente: $\underline{\underline{t \equiv 6\sqrt{3}\,x - 12y + \left(6 - \pi\sqrt{3}\right) = 0}}$.

b)

La recta normal tiene por pendiente la inversa de la tangente y con signo contrario. El valor de la pendiente para $x = \frac{\pi}{3}$ es:

$$m = f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \underline{\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{m' = -2}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{\pi}{3} = sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{N\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -2x + \frac{2\pi}{3}\ ;;\ 6y - 3\sqrt{3} = -12x + 4\pi.$$

Recta normal: $\underline{\underline{n \equiv 12x + 6y + \left(-3\sqrt{3} - 4\pi\right) = 0}}$.

c)

Siendo las pendientes $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $m_2 = -2$. Sabiendo que el ángulo que forman dos rectas conocidas sus pendientes es $tag\ \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$:

$$tag\ \alpha = \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2} \right| = \left| \frac{\frac{4+\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{3}} \right| = \frac{4+\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2(3-1)} = \frac{4\sqrt{3}+4+3+\sqrt{3}}{4} = \frac{7+5\sqrt{3}}{4} \cong$$

$$\cong \frac{15'66}{4} = 3'9151 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 75^{o}\ \ 40'\ \ 18''}}.$$

****