PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2015

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La matriz inversa de la matriz A.

b) Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $X\cdot A=B$ y $A\cdot Y=B$.

c) *Justificar razonadamente* que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2=I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica que $M^3=M^7$.

----

a)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to \tfrac{1}{8}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+3F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}}.$$

b)

$$X\cdot A=B;\ \ X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1};\ \ X\cdot I=B\cdot A^{-1}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{X=B\cdot A^{-1}}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{3}{4} & \frac{3}{8}+\frac{3}{8} \\ \frac{2}{4}+\frac{2}{4} & \frac{6}{8}-\frac{2}{8} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

$$A \cdot Y = B; \;\; A \cdot A^{-1} \cdot Y = A^{-1} \cdot B; \;\; I \cdot Y = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Y = A^{-1} \cdot B}.$$

$$Y = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{6}{8} & \frac{3}{4}-\frac{6}{8} \\ -\frac{1}{4}+\frac{2}{8} & -\frac{3}{4}-\frac{2}{8} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

Una forma de justificación:

$$\left.\begin{array}{l} M^3 = M^2 \cdot M = I \cdot M = M \\ M^7 = (M^2)^3 \cdot M = I^3 \cdot M = I \cdot M = M \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{M^3 = M^7}, \textbf{ c.q.j.}$$

Otra forma:

$$M^7 = M^3 \cdot M^3 \cdot M = (M \cdot M^2)^2 \cdot M = (M \cdot I)^2 \cdot M = M^2 \cdot M = \underline{M^3}, \textbf{ c.q.j.}$$

****

2º) Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π.

c) La distancia del punto P a la recta r, y *justificar razonadamente* que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 0)$.

El plano π, por ser perpendicular a r, tiene como vector normal a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta: $\vec{n} = (2, -1, 0)$.

La expresión general de π es de la forma: $\pi \equiv 2x - y + D = 0$.

Como el plano π contiene al punto $P(2, 0, -1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y + D = 0 \\ P(2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - (-1) + D = 0;\;\; 4 + 1 + D = 0 \Rightarrow \boldsymbol{D = -5}.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x - y - 5 = 0}.$$

b)

El punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π, tiene por componentes la solución del sistema que forman la recta y el plano:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot (-2\lambda) - \lambda - 5 = 0;\; -4\lambda - \lambda - 5 = 0;$$

$5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{Q(10, -5, 0)}$.

c)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

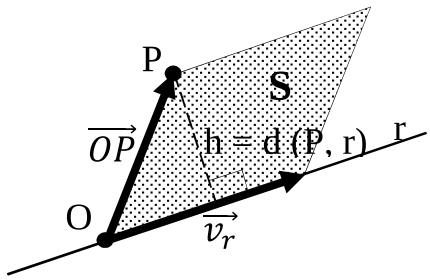
Un punto y un vector de r son $O(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$.

$\overrightarrow{OP} = [P - O] = (2,0,-1)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

$$\left.\begin{array}{c} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{OP}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \ \Rightarrow$$

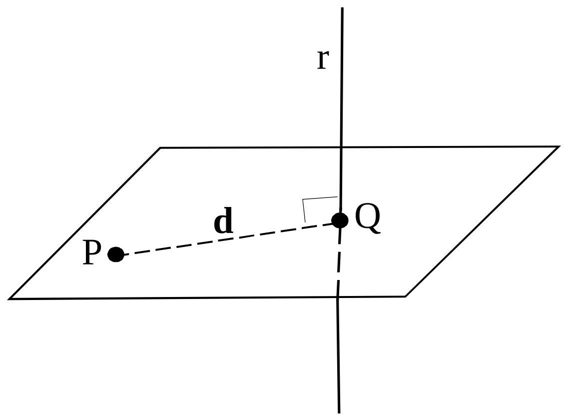
$$\Rightarrow \ h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}.$$



Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{OP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|i+2k+2j|}{\sqrt{4+1+0}} = \frac{|i+2j+2k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u = d(P,r)}.$$



La recta r, por ser perpendicular al plano π, es perpendicular a todos los segmentos situados en el plano π, por lo cual, la distancia de P a r es la menor posible; cualquier otro punto de r que no sea Q, está a mayor distancia del punto P, lo cual demuestra lo pedido.

****

3º) Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función real f definido por la expresión $f(x)=(x-1)(x-3)$, siendo x un número real.

b) El área del recinto limitado entre las curvas $y=(x-1)(x-3)$ e $y=-(x-1)(x-3)$.

c) El valor positivo a para el cual el área limitada entre la curva $y=a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $O(0,0)$ y $P(1,0)$ es 4/3.

----

a)

La expresión de la función en forma polinómica es: $f(x)=x^2-4x+3$.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$f'(x)=2x-4. \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0;\ x-2=0 \Rightarrow \boldsymbol{x=2}.$

Como quiera que $f(x)$ es una parábola convexa ($\cup$), para $x=2$ tiene su punto mínimo absoluto y los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x \in (2, +\infty)}.$$

b)

La parábolas $y=(x-1)(x-3)$ e $y=-(x-1)(x-3)$ puede expresarse de las formas siguientes: $y=f(x)=x^2-4x+3$ e $y=g(x)=-x^2+4x-3$, respectivamente.

Los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2-4x+3=-x^2+4x-3\ ;\ 2x^2-8x+6=0\ ;\ x^2-4x+3=0;$$

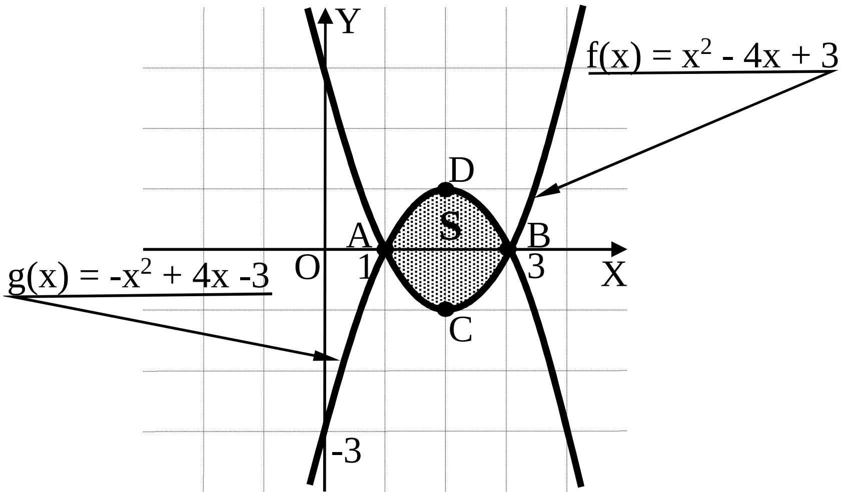
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=2\pm1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \rightarrow \underline{A(1,0)} \\ x_2=3 \rightarrow \underline{B(3,0)} \end{cases}.$$

El vértice de la parábola convexa ($\cup$) $\rightarrow f(x)=x^2-4x+3$ es el siguiente:

$f'(x)=2x-4=0 \rightarrow x=2 \ \Rightarrow C(2,-1).$

El vértice de la parábola cóncava ($\cap$) $\rightarrow g(x)=-x^2+4x-3$ es el siguiente:

$g'(x) = -2x + 4 = 0 \to x = 2 \;\Rightarrow D(2, 1).$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_1^3 [(-x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 4x + 3)]dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 6x\right]_1^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 =$$

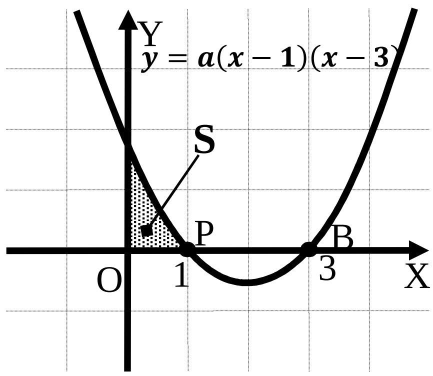
$$= \left(-\frac{54}{3} + 36 - 18\right) - \left(-\frac{2}{3} + 4 - 6\right) = -18 + 18 + \frac{2}{3} + 2 = \underline{\frac{8}{3}\, u^2 = S}.$$

$c)$

La curva $y = a(x-1)(x-3)$ con $a > 0$ es una parábola convexa $(\cup)$ que corta al eje X en los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$.

La curva se puede expresar de la forma $y = ax^2 - 4ax + 3$.

De la observación de la figura se deduce que:



$$\int_0^1 (ax^2 - 4ax + 3) \cdot dx = \frac{4}{3};$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{4ax^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3};\; \left(\frac{a}{3} - 2a + 3\right) - 0 = \frac{4}{3};$$

$a - 6a + 9 = 4;\;\; 5 = 5a \;\;\Rightarrow\;\; \underline{a = 1}.$

****

OPCIÓN B

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (1-a)x+(2a+1)y+(2a+2)z=a \\ ax+ay=2a+2 \\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=a^2-2a+9 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $a=1$.

b) *La justificación razonada* de si el sistema es compatible o incompatible para el valor de $a=2$.

c) Los valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 & a \\ a & a & 0 & 2a+2 \\ 2 & a+1 & a-1 & a^2-2a+9 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es:

$$Rang\ M=\begin{vmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=-a(a-1)^2+2a(a+1)^2-4a(a+1)-a(a-1)(2a+1)=$$

$$=-a(a^2-2a+1)+2a(a^2+2a+1)-4a^2-4a-a(2a^2+a-2a-1)=$$

$$=-a^3+2a^2-a+2a^3+4a^2+2a-4a^2-4a-2a^3+a^2+a=$$

$$=-a^3+3a^2-2a=-a(a^2-3a+2)=0\Rightarrow a_1=0;\ \ a^2-3a+2=0;$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow a_2=1, a_3=2.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\text{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=1\ es\ M'=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_3=2F_2\}\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

El sistema resulta $\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} 3x + 4z = 1 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$.

$$Haciendo\ y = \lambda \Rightarrow x = 4 - \lambda;\ \ 3\lambda + 4z = 1;\ \ 4z = 1 - 3\lambda \Rightarrow z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 4 - \lambda, y = \lambda, z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

$b)$

$$Para\ a = 2\ es\ M' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2 \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -18 + 12 + 60 - 8 + 18 - 90 = -26 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$c)$

Como se ha demostrado en el apartado a):

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.}$$

****

2º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

b) La recta t que pasa por el punto $O(0,0,0)$, sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s.

c) *Averiguar razonadamente* si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r.

----

a)

Para determinar un punto y un vector de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda, y = 3 + \lambda, z = 2 + 2\lambda \;\; \Rightarrow \;\; r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(0,3,2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,1,2)$.

El vector director de una recta determinada por dos planos es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos.

$$s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (0,3,0), \overrightarrow{n_2} = (1,0,-2).$$

$$\overrightarrow{v_s'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6i - 3k \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_s} = (2,0,1).$$

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(P;\, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x + 4(y-3) - 2(z-2) - (y-3) = 0;\;\; x + 3(y-3) - 2(z-2) = 0;$$

$$x + 3y - 9 - 2z + 4 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\pi \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}.$$

b)

El vector director de la recta t, por ser perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s, es linealmente dependiente del producto vectorial de estos dos vectores:

$$\overrightarrow{v_t'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 2j - 2k - j = i + j - 2k \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (1, 1, -2).$$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}}.$$

$c)$

El haz planos perpendiculares a s tienen como vector normal al vector director de la recta; su expresión general es de la forma $\beta \equiv 2x + z + D = 0$.

Si contiene a la recta r debe contener a todos sus puntos, para lo cual, basta que contenga a dos de ellos. Dos puntos de r son $P(0, 3, 2)$ y $Q(1, 4, 4)$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene a P es:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + z + D = 0 \\ P(0, 3, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 2 + D = 0 \to D = -2 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha \equiv 2x + z - 2 = 0}.$$

El plano α contiene a la recta r si contiene al punto Q:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x + z - 2 = 0 \\ Q(1, 4, 4) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 4 - 2 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q \notin \alpha}.$$

$$\underline{No\ existe\ ningún\ plano\ perpendicular\ a\ s\ que\ contenga\ a\ r.}$$

****

3º) Un pueblo está situado en el punto $A(0, 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y = \frac{x^2}{4}$, siendo $-6 \leq x \leq 6$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

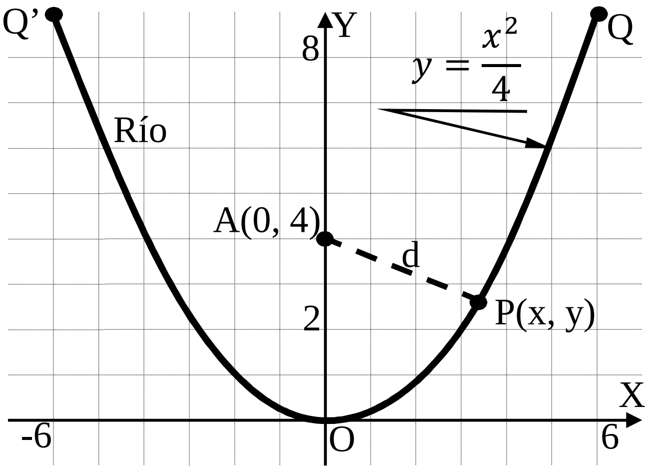
$a)$ La distancia entre el punto $P(x, y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x del punto P.

$b)$ El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo.

$c)$ El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo.

$a)$

La distancia pedida es $d = \overline{AP}$.



$$d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16} - 2x^2 + 16} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^4 - 16x^2 + 256}{16}} = \frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4}.$$

$$\underline{d(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}.}$$

$b), c)$

Para que la distancia sea mínima es necesario que se anule su primera derivada y que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$d'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3 - 32x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = \frac{x^3 - 8x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}.$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 8x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = 0;\ \ x^3 - 8x = 0;\ \ x(x^2 - 8) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0}.$$

$$x^2 - 8 = 0;\ \ x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = +2\sqrt{2}, x_3 = -2\sqrt{2}}.$$

$$d''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 - 8) \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} - (x^3 - 8x) \cdot \frac{4x^3 - 32x}{2 \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}}{x^4 - 16x^2 + 256} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 - 8) \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} - \frac{2x(x^2 - 8)(x^3 - 8x)}{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}}{x^4 - 16x^2 + 256} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 - 8) \cdot (x^4 - 16x^2 + 256) - 2x(x^2 - 8)(x^3 - 8x)}{(x^4 - 16x^2 + 256) \cdot \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}.$$

$$d''(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-8) \cdot 256 - 0}{256 \cdot \sqrt{256}} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$d''\left(\sqrt{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 192 - 0}{192 \cdot \sqrt{192}} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{M\acute{i}nimo\ relativo\ para\ x = 2\sqrt{2}}.$$

Por ser la curva par, simétrica con respecto al eje de ordenadas, también tiene un mínimo relativo para $x = -2\sqrt{2}$.

Observaciones:

1ª.- Debe observarse que el máximo relativo no es la máxima distancia del río al pueblo en el tramo urbano; la máxima distancia del río al pueblo se produce en los puntos Q y Q’.

2ª.- Los mínimos relativos si son mínimos absolutos teniendo en cuenta la índole de la curva, que es una parábola y la máxima distancia sería infinito de no estar acotada a valores de $x \leq 6$.

$$P(x, y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow P\left(2\sqrt{2}, 2\right). \qquad Q(x, y) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 6 \\ y = 9 \end{Bmatrix} \Rightarrow Q(6, 9).$$

Por simetría: $P'\left(-2\sqrt{2}, 2\right)$ y $Q'(-6, 9)$.

La distancia máxima relativa es $d(0) = \frac{1}{4}\sqrt{256} = \boldsymbol{4\ unidades}$.

La distancia máxima absoluta es:

$$d = \overline{AQ} = \sqrt{(6-0)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \cong \boldsymbol{7{,}81\ unidades}.$$

La distancia mínima es:

$$d\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{64 - 128 + 256} = \frac{\sqrt{192}}{4} \cong \boldsymbol{3{,}46\ unidades}.$$

$$\underline{Los\ puntos\ de\ m\acute{i}nima\ distancia\ son\ P\left(2\sqrt{2}, 2\right)\ y\ P'\left(-2\sqrt{2}, 2\right).}$$

$$\underline{Los\ puntos\ de\ m\acute{a}xima\ distancia\ son\ Q(6, 9)\ y\ Q'(-6, 9).}$$

****