PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2017

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo I la matriz unidad. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La justificación de que la matriz A es invertible.

b) Los valores posibles del determinante de B.

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$A^2 = -A - I;\ \ A^2 + A = -I;\ \ A \cdot (A + I) = -I \Rightarrow |A \cdot (A + I)| = |-I|;$$

$|A||A + I| = -1 \Rightarrow |A| \neq 0, |A + I| \neq 0$, lo cual prueba que:

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ como\ queríamos\ justificar.}$$

b)

Una solución trivial es $|B| = 0$ y otras soluciones son las siguientes:

$$2B^3 = B;\ \ 2B^2 \cdot B = B \Rightarrow 2B^2 = I; 2 \cdot B \cdot B = I \Rightarrow |2 \cdot B \cdot B| = |I|;$$

$$|2B||B| = 1;\ \ 2^3 \cdot |B||B| = 1;\ \ (|B|)^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow |B| = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\underline{Soluciones: |B| = 0;\ |B| = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.}$$

$c)$

$$2B^3 = B;\ \ 2B^2 \cdot B = B;\ \ 2B^2 \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1};\ \ 2B^2 \cdot I = I;$$

$$2 \cdot B \cdot B = I \Rightarrow |2B||B| = 1;\ \ 2^3 \cdot |B||B| = 1;\ \ |B^2| = \frac{1}{8}.$$

$$\underline{|B^2| = \frac{1}{8}.}$$

****

2º) Se dan la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = n$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se corten en un punto.

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan.

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π.

----

a)

La recta r y el plano π se corten en un punto cuando el sistema que forman es compatible determinado.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2x + y + mz = n \end{array}\right\}$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, es decir, tres.

Para que el rango de ambas matrices sea tres es suficiente que el rango de la matriz de coeficientes sea tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 2 + 4 + 12 + 1 + 2m = 5m + 15 = 0;$$

$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$.

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ se\ cortan\ en\ un\ punto\ \forall m \in R - \{-3\}\ y\ n \in R.}$$

b)

La recta r y el plano π no se cortan cuando son paralelos sin ser coincidentes, o sea, cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares y el plano no contiene ningún punto de r.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

Para determinar un punto y un vector de la recta r se expresa mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2z=1+2\lambda \\ x-z=1-3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x+2z=-1-2\lambda \\ x-z=1-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=-5\lambda;\;\; x=1+2\lambda-10\lambda=1-8\lambda \;\Rightarrow\; r \equiv \begin{cases} x=1-8\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(8,-1,5)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x+y+mz=n$ es $\vec{n}=(2,1,m)$.

$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (8,-1,5)\cdot(2,1,m)=0;\; 16-1+5m=0;\;\; 15+5m=0;$

$3+m=0 \Rightarrow m=-3.$

$$\pi \notin P \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+y-3z=n \\ P(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+0-0 \neq n \Rightarrow n \neq 2.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ no\ se\ cortan\ para\ m=-3\ y\ n\neq 2.}$

$c)$

La recta r está contenida en el plano π cuando tienen infinitos puntos en común, o sea, cuando el sistema que forman es compatible indeterminado.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas, es decir, menor que tres.

Un menor de la matriz de coeficientes es $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ A=2.$

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & n \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A'=2 \Rightarrow \{F_1+F_2=F_3\} \Rightarrow n=2.$$

$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ m=-3\ y\ n=2.}$

****

3º) Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$.

c) El valor del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$.

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

Corte con el eje Y: $f(x) = x^3 - ax \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - ax = 0;\ x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{a}, x_3 = \sqrt{a} \Rightarrow \underline{O(0,0)}, \underline{P(-\sqrt{a}, 0)}\ y\ \underline{Q(\sqrt{a}, 0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - a = 0;\ \ x^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3a}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3a}}{3}.$$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los tres siguientes intervalos: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)\ y\ \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty\right)$ que son, alternativamente, crecientes o decrecientes.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ es $f'(0) = -a < 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3a}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}, \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)}.$$

$b)$

Cuando $a = 9$ la función es $f(x) = x^3 - 9x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes: $O(0,0), P(-3,0)\ y\ Q(3,0)$.

Los puntos máximo y mínimo son los siguientes:

$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0;\ \ x^2 = 3 \Rightarrow$

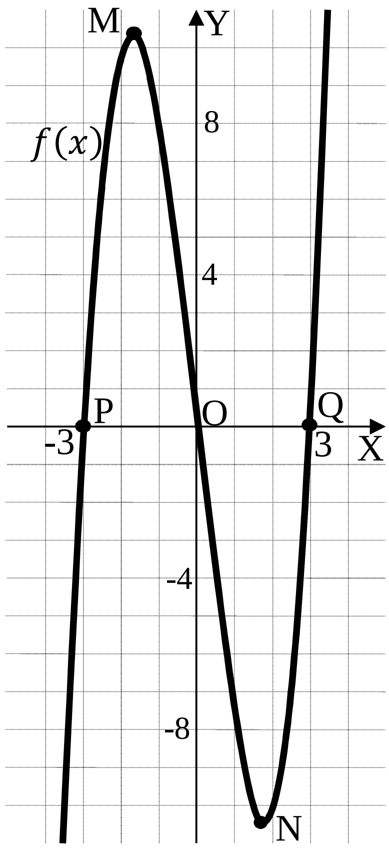
$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$.

Teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función por ser $f(-x) = -f(x)$:

$f\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \cong 10{,}4\ \Rightarrow$

$\Rightarrow Máx\ \Rightarrow M\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$.

Por simetría: $Mín. \Rightarrow N\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$.



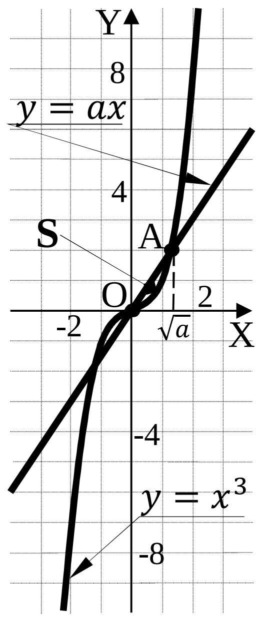
La representación gráfica de la función, aproximada, aparece en la figura adjunta.

$c)$

La abscisa del punto de corte de la curva $y = x^3$ con la recta $y = ax$, cuando $a > 1$, es la siguiente:

$x^3 = ax;\ \ x^2 = a \Rightarrow x = +\sqrt{a}$.

En el intervalo $\left(0, \sqrt{a}\right)$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la función, por lo cual el área pedida es la siguiente:



$$S = \int_0^{\sqrt{a}} [ax - x^3] \cdot dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= \left[\frac{a \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right] - 0 = \frac{a \cdot a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2 - a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{a^2}{4}\ u^2.}$$

$d)$

El área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 0 = 4.$$

$$\frac{a^2}{4} = 4; \;\; a^2 = 16 \Rightarrow a > 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 4}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}.

$b)$ La justificación de que $A^4=I$.

$c)$ El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible, c.q.j.}$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to -F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)\;\Rightarrow\;\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}}.$$

$$\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$b)$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ A^4=I.}$$

$c)$

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{30} = (A^4)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{A^{30} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = I \quad \Rightarrow \quad \underline{A^{100} = I}.$$

****

2º) Se dan la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$.

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b.

----

a)

Para $a = -b = 1 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $\pi \equiv 2x - y - z = 0$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y - z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0;$$

$2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0;\ \ 8\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$.

$$\left.\begin{cases} x = 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{8} \\ z = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)}.$$

b)

Para $a = b = 4 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$ y $\pi \equiv 2x - y + 4z = 0$.

Un punto y un vector director de r son $A(1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (4, 4, -1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, -1, 4)$.

Como es lógico, la recta r es paralela al plano (en cualquier otro caso la distancia sería cero), para lo cual es necesario que el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal del plano, o sea, que su producto escalar tiene que ser cero, como se comprueba a continuación:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (4, 4, -1) \cdot (2, -1, 4) = 8 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{Paralelos, c.q.c.}$$

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la de cualquier punto de r al plano π.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(1, 0, 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x - y + 4z = 0$:

$$d(P, \pi) = d(r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|2 - 0 + 4|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{6\sqrt{21}}{21} = \underline{\frac{2\sqrt{21}}{7}\ unidades.}$$

$c)$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1};\ \ r \equiv \begin{cases} ax - a = 4y \\ -x + 1 = 4z - 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} ax - 4y = a \\ x + 4z = 5 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} ax - 4y = a \\ x + 4z = 5 \\ 2x - y + bz = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -4 & 0 & a \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1.-Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

$2.-Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

$3.-Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M\ y\ M' \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -4 & 0 & a \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Rotando \\ filas \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ a & -4 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \\ 0 & -4 & -4a & -4a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \\ 0 & 1 & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & -1 & b-8 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & a+b-8 & a-10 \end{pmatrix}.$$

$$a+b-8=0;\ \ a=8-b$$

$$Para\ a=10\ y\ b=-2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a=10\ y\ b=-2 \Rightarrow La\ recta\ esta\ contenida\ en\ el\ plano.}$$

$$\left.\begin{array}{l} Para\ a=10\ y\ b\neq -2 \\ Para\ a\neq 10\ y\ a+b\neq 8 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\left.\begin{array}{l} Para\ a=10\ y\ b\neq -2 \\ Para\ a\neq 10\ y\ a+b\neq 8 \end{array}\right\} \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.}$$

$$Para\ a\neq 10\ y\ a+b\neq 8 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a\neq 10\ y\ a+b\neq 0 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ paralelos.}$$

****

3º) Se considera el triángulo T de vértices $O(0,0)$, $A(x,y)$ y $B(0,y)$, siendo $x>0$, $y>0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El área del triángulo T en función de x.

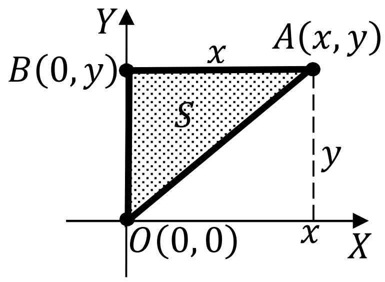
b) El valor de x para el que dicha área es máxima.

c) El valor de dicha área máxima.

----

a)

Para facilitar la comprensión del ejercicio se ilustra con un dibujo aproximado de la situación.



$$S=\frac{Base\times Altura}{2}=\frac{x\cdot y}{2}. \qquad (*)$$

$$\overline{OA}+\overline{AB}=30;\ \sqrt{x^2+y^2}+x=30;$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=30-x;\ x^2+y^2=(30-x)^2=900-60x+x^2;\ y^2=900-60x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{900-60x}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión (*):

$$S=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{x\cdot\sqrt{900-60x}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{900x^2-60x^3}.$$

$$\underline{S(x)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{900-60x}.}$$

b)

La condición necesaria para que el área sea máxima es que se anule su primera derivada:

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1.800x-180x^2}{2\sqrt{900x^2-60x^3}}=0\Rightarrow 1.800x-180x^2=0;\ \ 180x(10-x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=0, x_2=10.$$

La solución $x=0$ carece de sentido y, además, con cumple la condición $x>0$.

$$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x=10\ metros.}$$

c)

$$S(10)=\frac{10}{2}\cdot\sqrt{900-60\cdot 10}=5\cdot\sqrt{300}=50\sqrt{3}\cong 86{,}60.$$

$$\underline{La\ superficie\ máxima\ es\ S = 86{,}60\ metros\ cuadrados.}$$

****