PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2017

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+ay+2z=a \\ 2x+ay-z=2 \\ ax-y+2z=a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La solución del sistema cuando $a=2$.

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible determinado.

c) El valor del parámetro a para que el sistema es compatible indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a.

----

a)

Cuando $a=2$ el sistema resulta $\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{8-4-4-8-2-8}{-4-4-4-8+1-8}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4+8-4-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&2&2\\2&-1&2\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4-4+8-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Solución: x=y=z=\frac{2}{3}.}$$

$b)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen rango tres, o sea, cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero:

Matriz de coeficientes: $M=\begin{pmatrix}-1&a&2\\2&a&-1\\a&-1&2\end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix}-1&a&2\\2&a&-1\\a&-1&2\end{vmatrix}=-2a-4-a^2-2a^2+1-4a=0;$$

$$-3a^2-6a-3=0;\ \ a^2+2a+1=0;\ \ (a+1)^2=0\Rightarrow a=-1.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a\in R-\{-1\}.}$$

$c)$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible indeterminado cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango y menor de tres, que es el número de incógnitas.

La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix}-1&a&2&a\\2&a&-1&2\\a&-1&2&a\end{pmatrix}$.

Del apartado $b)\Rightarrow Para\ a=-1\Rightarrow Rang\ M=2$ por ser $\begin{vmatrix}-1&-1\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0$.

$$Para\ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1&-1&2&-1\\2&-1&-1&2\\-1&-1&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a=-1.}$$

$c)$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases}-x-y+2z=-1\\2x-y-z=2\\-x-y+2z=-1\end{cases}$, que tiene dos ecuaciones iguales, por lo que es equivalente al sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ 2x-y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1+2\lambda \\ 2x-y=2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3+3\lambda;\ \ x=1+\lambda;$$

$x+y=1+2\lambda;\ \ 1+\lambda+y=1+2\lambda \Rightarrow y=\lambda.$

$$\underline{Solución: x=1+\lambda;\ y=\lambda;\ z=\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Se dan el punto $P(1, 1, 1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano de ecuación general $\pi \equiv x + y + z = 1$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*, las ecuaciones de:

a) El plano α que contiene al punto P y a la recta r.

b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π.

c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x + y = -1 + \lambda \\ x + 2y = 1 + \lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} -x - y = 1 - \lambda \\ x + 2y = 1 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2; \;\; x = -1 + \lambda - y = -1 + \lambda - 2 = -3 + \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto de r es $A(-3, 2, 0)$ y un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, 1)$.

Los puntos A y B determinan $\overrightarrow{AP} = [P - A] = (4, -1, 1)$.

$$\alpha(P; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$4(y - 1) - (z - 1) + (x - 1) - (y - 1) = 0; \;\; 3(y - 1) + (x - 1) - (z - 1) = 0;$

$x - 1 + 3y - 3 - z + 1 = 0.$

$$\underline{\alpha \equiv x + 3y - z - 3 = 0}.$$

b)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, 1)$, que también es vector director de la recta s pedida:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda. \\ z = 1 + \lambda \end{cases}}$$

La distancia de un punto a un plano es $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al punto $P(1,1,1)$ y plano $\pi \equiv x+y+z-1=0$:

$$d(P,\pi)=\frac{|1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\underline{d(P,\pi)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades}.$$

El punto de intersección de la recta s con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv x+y+z-1=0\\ s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow (1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)-1=0;$$

$1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda-1=0;\ \ 3\lambda=-2\Rightarrow\lambda=-\frac{2}{3}.$

$$\left.\begin{cases}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}\right\}\Rightarrow\ \underline{M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}.$$

$c)$

Un punto de r es $A(-3,2,0)$:

$$\sigma(A;\ \overrightarrow{v_r},\vec{n})\equiv\begin{vmatrix}x+3 & y-2 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0;$$

$(y-2)+z-(x+3)-(y-2)=0;\ -(x+3)+z=0;\ \ -x-3+z=0.$

$$\underline{\sigma\equiv x-z+3=0}.$$

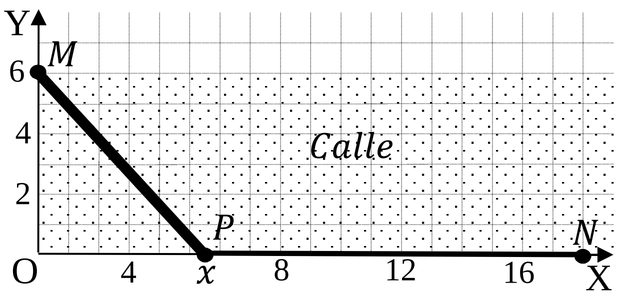
****

3º) Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que los puntos son $M(0, 6)$, $P(x, 0)$ y $N(18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 euros/m. El precio del cable PN es de 5 euros/m. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 18$.

b) El valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para que el costo total C es mínimo.

c) El valor de dicho costo total mínimo.



a)

$$C(x) = 10 \cdot \overline{MP} + 5 \cdot (18 - x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 6^2} + 90 - 5x.$$

$$\underline{C(x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 36} - 5x + 90}.$$

b)

El coste es mínimo para los valores de x que anulan su primera derivada y hacen positiva la segunda derivada:

$$C'(x) = 10 \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5 = 0;\ \ \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} - 1 = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36};$$

$$4x^2 = x^2 + 36;\ \ 3x^2 = 36;\ \ x^2 = 12 \Rightarrow x_1 = -2\sqrt{3},\ x_2 = 2\sqrt{3}\,.$$

$$C''(x) = \frac{10 \cdot \sqrt{x^2+36} - 10x \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+36}}}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2} = 10 \cdot \frac{\sqrt{x^2+36} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{\sqrt{x^2+36}} = 10 \cdot \frac{x^2+36-x^2}{(x^2+36)\sqrt{x^2+6^2}} =$$

$$= 360 \cdot \frac{1}{(x^2+36)\sqrt{x^2+6^2}} = 360 \cdot \frac{\sqrt{x^2+6^2}}{(x^2+36)^2}.$$

$$C''\left(-2\sqrt{3}\right) = C''\left(2\sqrt{3}\right) = 360 \cdot \frac{\sqrt{12+36}}{(12+36)^2} > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

Teniendo en cuenta que la raíz negativa no pertenece al dominio de la función:

$$\underline{El\ costo\ es\ mínimo\ para\ x = 2\sqrt{3}\ metros \cong 3{,}46\ metros}.$$

$c)$

$$C\left(2\sqrt{3}\right) = 10 \cdot \sqrt{12+36} - 5 \cdot 2\sqrt{3} + 90 = 10 \cdot \sqrt{48} - 10\sqrt{3} + 90 =$$

$$= 10 \cdot \sqrt{16 \cdot 3} - 10\sqrt{3} + 90 = 10 \cdot 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 90 = 30\sqrt{3} + 90 =$$

$$= 30 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) \cong 141{,}96.$$

$$\underline{El\ costo\ mínimo\ es\ de\ 141{,}96\ euros}.$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, y el cálculo de la matriz C^4.

$b)$ El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1.

$c)$ La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B \cdot B = B$.

$a)$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2C - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ C^2 = 2C - I.}$$

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}.}$$

$b)$

$$M = (3A^4)(4A^2)^{-1} = \frac{3A^4}{4A^2} = \frac{3}{4} \cdot A^2.$$

Para la resolución de este apartado conviene recordar propiedades de las matrices y los determinantes tales como las siguientes:

Cuando se multiplica una matriz por un número quedan multiplicados todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

Temiendo en cuenta, además, que la matriz A es cuadrada de orden 4:

$$|M| = \left|\frac{3}{4} \cdot A^2\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot |A| \cdot |A| = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot (-1)^2 = \frac{3^4}{4^4}.$$

$$\underline{|(3A^4)(4A^2)^{-1}| = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}}.$$

$c)$

$B \cdot B = B.$ Multiplicando los dos términos por la derecha por B^{-1}:

$$B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1}; \;\; B \cdot I = I \Rightarrow B = I.$$

$$\underline{La \text{ única } matriz\ invertible\ B\ que\ cumple\ que\ B \cdot B = B\ es\ B = I}.$$

****

2º) Sea T un tetraedro de vértices $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$ y $C(0,3,0)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C, y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O.

$b)$ El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π.

$c)$ El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, y el volumen del tetraedro T.

$a)$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$ y $C(0,3,0)$ determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,0,0) - (1,1,1)] = (2,-1,-1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,3,0) - (1,1,1)] = (-1,2,-1).$$

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-3) + y + 4z - z + 2(x-3) + 2y = 0;\ \ 3(x-3) + 3y + 3z = 0;$

$x - 3 + y + z = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + y + z - 3 = 0}.$$

Un vector normal de π es $\vec{n} = (1,1,1)$.

La recta pedida h_0 dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{h_0 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$

$b)$

El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \\ h_0 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0;\ \ 3\lambda = 3;\ \ \lambda = 1$$

$$\left.\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{A(1,1,1)}.$$

$c)$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |i + j + 4k - k + 2i + 2j| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |3i + 3j + 3k| = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\underline{S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ u^2.}$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

Siendo los vértices del tetraedro $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(3, 0, 0)$ y $C(0, 3, 0)$, los vectores que lo determinan son: $\overrightarrow{OA} = (0, 0, 0)$; $\overrightarrow{OB} = (3, 0, 0)\ y\ \overrightarrow{OC} = (0, 3, 0)$.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2}.$$

$$\underline{V_{OABC} = \frac{3}{2}\ u^3 = 1{,}5\ u^3.}$$

****

3º) Dada la función f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x\neq 0$, se pide obtener *razonadamente*, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, y los extremos relativos de la función f.

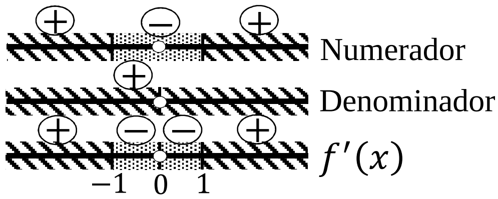
$b)$ Las asíntotas de la curva $y=f(x)$.

$c)$ El área de la región plana limitada por la curva $y=\frac{x^2+1}{x}$, $1\leq x\leq e$, el segmento que une los puntos $P(1,0)$ y $Q(e,0)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$.

$a)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$



$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-1}{x^2}=0;\ x^2-1=0\Rightarrow x_1=-1,x_2=1.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f)\Rightarrow R-\{0\}$ y de la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento:(-1,0)\cup(0,1).}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^2-2x^2+2}{x^3}=\frac{2}{x^3}.$$

$$f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0\ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=-1.$$

$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = -2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: A(-1, -2)}.$

$f''(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = \frac{1^2+1}{1} = \frac{1+1}{1} = 2 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: B(1, 2)}.$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x = 0 \ \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

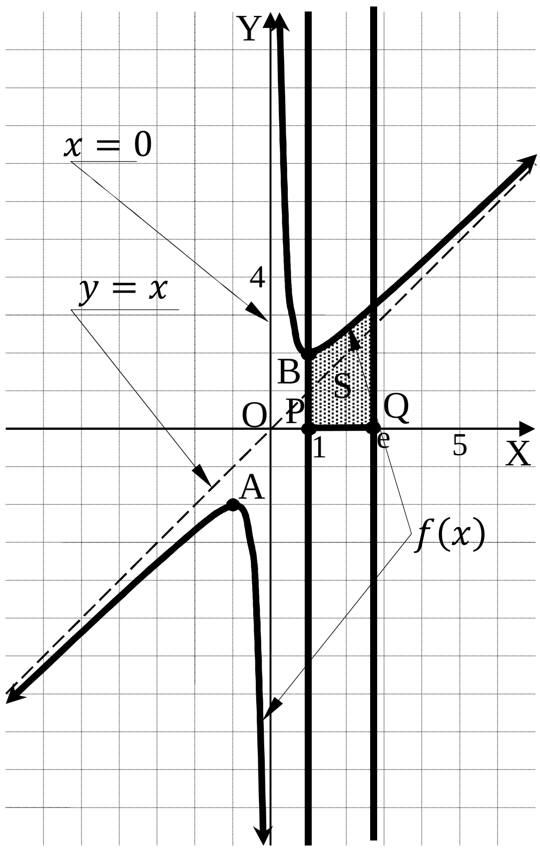
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}$



$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la indicada en la figura adjunta.

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{x} \cdot dx =$$

$$= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + Lx\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + Le\right) - \left(\frac{1^2}{2} + L1\right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 0 =$$

$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}.$

$$\underline{S = \frac{e^2+1}{2}\, u^2 \cong 4{,}19\, u^2.}$$

****