PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JULIO – 2018

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible.

b) Las soluciones del sistema cuando $a=1$.

c) Las soluciones del sistema cuando $a=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)^2+1-a=a^2-2a+1+1-a=$$

$$=a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow a_1=1, a_2=2.$$

$$Para\ \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{L_1 = L_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ \forall a \in R - \{2\}.}$$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado; haciendo $y = \lambda$: $x = 1 - \lambda$.

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R.}$$

$c)$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}. \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = y = z = \tfrac{1}{2},\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Se tiene el plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1,1,1)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La recta r que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π.

b) El plano β que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s.

c) Discute si el punto $P(3,2,1)$ está en la recta t paralela a s que pasa por $Q(5,3,1)$.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Un punto genérico de s es $B(2\lambda, \lambda, 0)$.

Un vector director de r es:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = [(2\lambda, \lambda, 0) - (1,1,1)] = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Por ser la recta r paralela al plano π, el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0; \;\; 2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0;$$

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2 \cdot 1 - 1, 1 - 1, -1) = (1, 0, -1).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = 1 - \mu \end{cases}.$$

b)

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, 0)$.

El plano β, por per perpendicular a π, tiene como vector director al vector normal de π y, por ser paralelo a la recta s, también tiene como vector director al vector director de s. La expresión general de β es la siguiente:

$$\beta(A;\; \vec{n}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$2(y-1)+(z-1)+2(z-1)-(x-1)=0;$

$-(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0;\ -x+1+2y-2+3z-3=0.$

$$\underline{\beta \equiv x-2y-3z+4=0}.$$

$c)$

La recta t paralela a s que pasa por $Q(5,3,1)$ es $t \equiv \begin{cases} x=5+2\delta \\ y=3+\delta \\ z=1 \end{cases}.$

Para que el punto $P(3,2,1)$ pertenezca a la recta t tiene que satisfacer su ecuación:

$$t \equiv \begin{cases} x=5+2\delta \\ y=3+\delta \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5+2\delta=3 \\ 3+\delta=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta=-1 \Rightarrow P(3,2,1).$$

$\underline{\mathit{El\ punto}\ P(3,2,1)\ \mathit{está\ en\ la\ recta\ paralela\ a}\ s\ \mathit{que\ pasa\ por}\ Q(5,3,1)}.$

****

3º) Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cdot \cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$.

c) $I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx$.

----

a)

$$f(1) = 22 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1) = 22;$$

$$a + b + c \cdot \cos\pi = 22;\ \ a + b + c \cdot (-1) = 22 \Rightarrow \underline{a + b - c = 22}.$$

b)

El punto P tiene la siguiente expresión: $P[1, f(1)] \approx P(1, 22)$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual, por ser la recta horizontal es $m = f'(1) = 0$.

$$f(x) = 3ax^2 + 2bx + c \cdot [1 \cdot \cos(\pi x) + \pi x \cdot sen\ (\pi x)] =$$

$$= 3ax^2 + 2bx + c \cdot \cos(\pi x) + c \cdot \pi x \cdot sen\ (\pi x).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \cdot \cos(\pi \cdot 1) + c \cdot \pi \cdot 1 \cdot sen\ (\pi \cdot 1) = 0;$$

$$3a + 2b + c \cdot (-1) + c \cdot \pi \cdot 0 = 0\ \Rightarrow \underline{3a + 2b - c = 0}.$$

c)

$$I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ \cos(\pi x) \cdot dx = dv \to v = \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot dx = \frac{x}{\pi} \cdot \text{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi} \int \text{sen}(\pi x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x) = A.$$

$$I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = \left[\frac{x}{\pi} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos(\pi x)\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen}\pi + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos\pi\right] - \left[\frac{0}{\pi} \cdot \operatorname{sen} 0 + \frac{1}{\pi^2} \cos 0\right] = 0 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos\pi - 0 - \frac{1}{\pi^2} \cdot \cos 0 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \cdot (-1) - \frac{1}{\pi^2} \cdot 1 = -\frac{2}{\pi^2}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 x \cdot \cos(\pi x) \cdot dx = -\frac{2}{\pi^2}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Resolver los siguientes apartados, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Dados A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ u $BA \neq B$.

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot B \cdot A = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B = \underline{A, c.q.d.}$$

$$B^2 = B \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot A \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot A = \underline{B, c.q.d.}$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow a = 1, b = 0 \\ 2 \rightarrow a = 0, b = 1 \end{array} \right. .$$

$$1 \rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow No\ vale.$$

$$2 \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \Rightarrow Si\ vale.$$

$$2 \rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B \Rightarrow Si\ vale.$$

$$\underline{Los\ valores\ que\ cumplen\ las\ condiciones\ pedidas\ son\ a = 0\ y\ b = 1.}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = \underline{6}.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes de que si se multiplica o divide una línea de un determinante por un valor real, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho valor real.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = \underline{3}.$$

Se han utilizado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene una línea que es combinación lineal de otras líneas su valor es cero. (en el 2º determinante la primera columna es la suma de las otras dos)

****

2º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) La ecuación del plano π que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos $A(5,0,1)$ y $B(4,1,0)$.

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda;\ \ x=3-\lambda;\ \ z=x+4y-8=$$

$$=3-\lambda+4\lambda-8=-5+3\lambda=z\ \Rightarrow\ \underline{r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+3\lambda \end{cases}}.$$

b)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(-1,1,3)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{BA}=[A-B]=(1,-1,1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{BA}) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$(x-5)+3y+(z-1)-(z-1)+3(x-5)+y=0;\ \ 4(x-5)+3y=0;$

$(x-5)+y=0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\pi \equiv x+y-5=0}.$

c)

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,1,0)$.

$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(-1,1,3)\cdot(1,1,0)=-1+1=0 \Rightarrow$ La recta r es paralela al plano π.

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de la recta r es $P(3,0,-5)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(3,0,-5)$ y al plano $\pi \equiv x+y-5=0$:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 3+1\cdot 0+0\cdot(-5)-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|3+0+0-5|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\underline{\sqrt{2}\ unidades}.$$

****

3º) Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

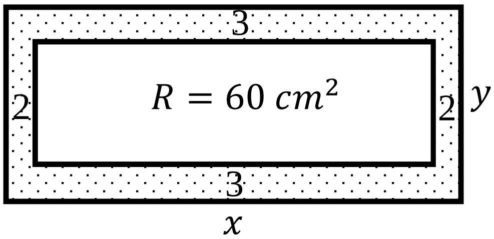
a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R.

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

----

a)



De la observación de la figura se deduce que:

$$(x-4)(y-6)=600;\ \ xy-6x-4y+24=600;\ \ xy-6x-4y=576;$$

$$xy-4y=576+6x;\ \ y(x-4)=576+6x \Rightarrow y=\frac{576+6x}{x-4}.$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$$S(x,y)=x\cdot y \Rightarrow S(x)=x\cdot\frac{576+6x}{x-4}=6\cdot\frac{96x+x^2}{x-4}.$$

$$\underline{S(x)=6\cdot\frac{96x+x^2}{x-4}}.$$

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x)=6\,\frac{(96+2x)\cdot(x-4)-(96x+x^2)\cdot 1}{(x-4)^2}=6\,\frac{96x-384+2x^2-8x-96x-x^2}{(x-4)^2}=6\,\frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}.$$

$$S'(x)=0\Rightarrow 6\cdot\frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}=0;\ x^2-8x-384=0;\ \ x=\frac{8\pm\sqrt{64+1.536}}{2}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{1.600}}{2}=\frac{8\pm 40}{2}=4\pm 20\Rightarrow\begin{cases}x_1=-16<0\\ x_2=24\end{cases}.$$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x=24$.

Se justifica a continuación que el valor hallado es para mínimo:

$$S''(x) = 6\,\frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2-(x^2-8x-384)\cdot[2(x-4)\cdot 1]}{(x-4)^4} = 6\,\frac{(2x-8)\cdot(x-4)-2(x^2-8x-384)}{(x-4)^3} =$$

$$= 6\cdot\frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+768}{(x-4)^3} = 6\cdot\frac{800}{(x-4)^3} = \frac{5.400}{(x-4)^3}.$$

$$S''(24) = \frac{5.400}{(24-4)^3} = \frac{540}{(20)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo, c.q.j.$$

$$\underline{x = 24\ cm}.$$

$c)$

$$y = \frac{576+6\cdot 24}{24-4} = \frac{576+144}{20} = \frac{720}{20} = 36.$$

$$\underline{La\ cartulina\ de\ áraa\ mínima\ tiene\ 24\ cm\ de\ base\ y\ 36\ cm\ de\ altura}.$$

****